Normale estimation using the k-Voronoi covariance measure

Louis Cuel

Université de Grenoble
Laboratoire Jean Kuntzman

Université de Savoie
LAMA

Collaboration : J.O. Lachaud, Q. Mérigot, B. Thibert

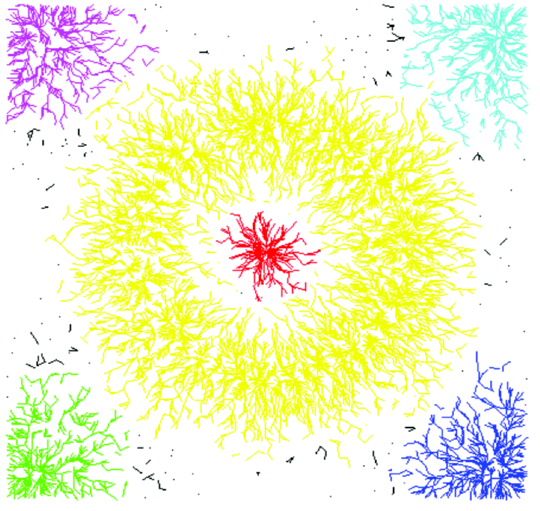
Journées Informatique Géométrie, 14/11/2013

Inférence Géométrique

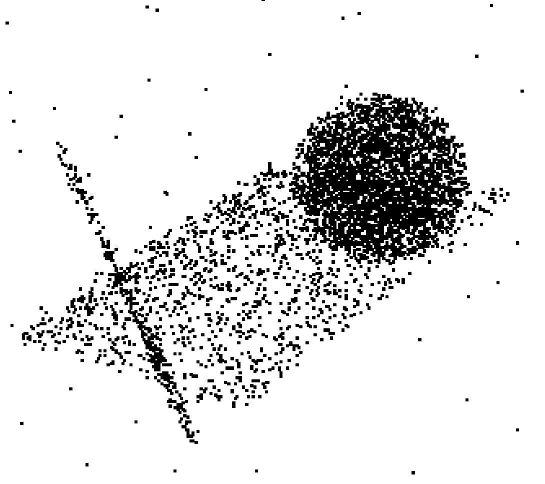
Soit : — Un objet inconnu K (ensemble compact) de $\mathbb{R}^d$

— Un ensemble fini de points $P \subseteq \mathbb{R}^d$ approximant K.

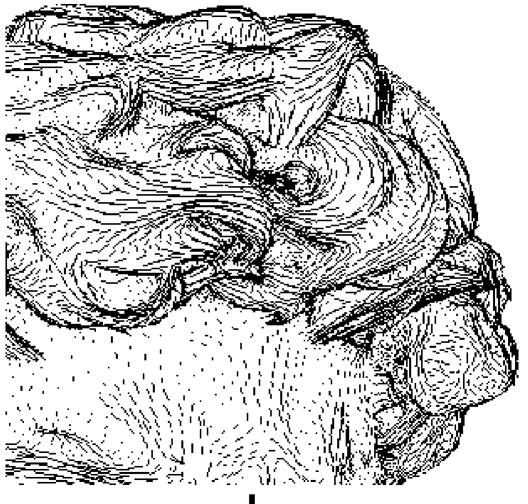
Que peut on dire de la topologie et de la géométrie de K?



#composantes connexes



dimension intrinséque



courbure

détection d'arête

- Pouget, Cazals ['04]; Chazal, Cohen-Steiner, Lieutier, Thibert ['08] ...

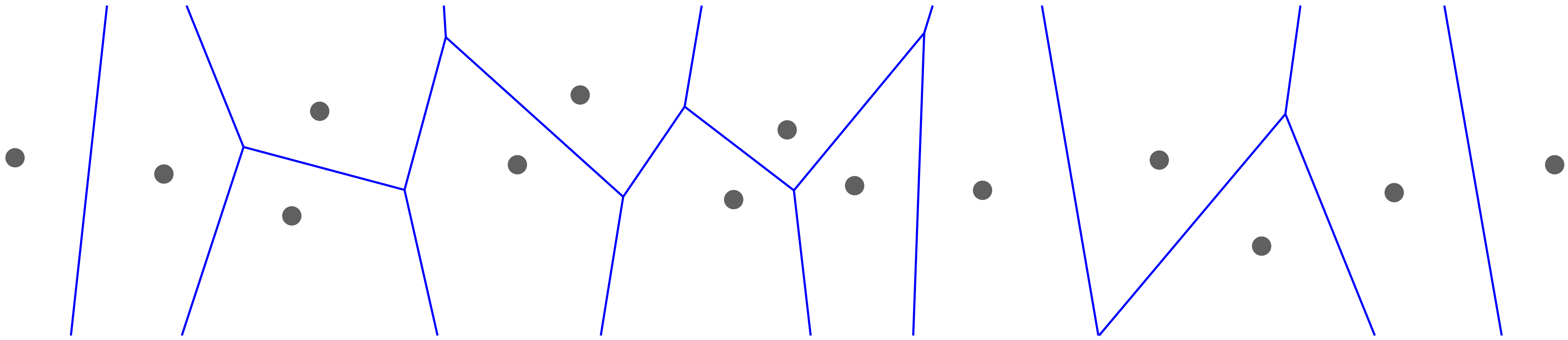
Travaux précédents

1. algorithmes basés Voronoi :

– Amenta et Bern, 1999, Surface reconstruction by Voronoi filtering

– Cohen-Steiner et al., 2007,Voronoi-based Variational Reconstruction

– Merigot et al., 2009,Robust Voronoi-based Curvature and Feature Estimation



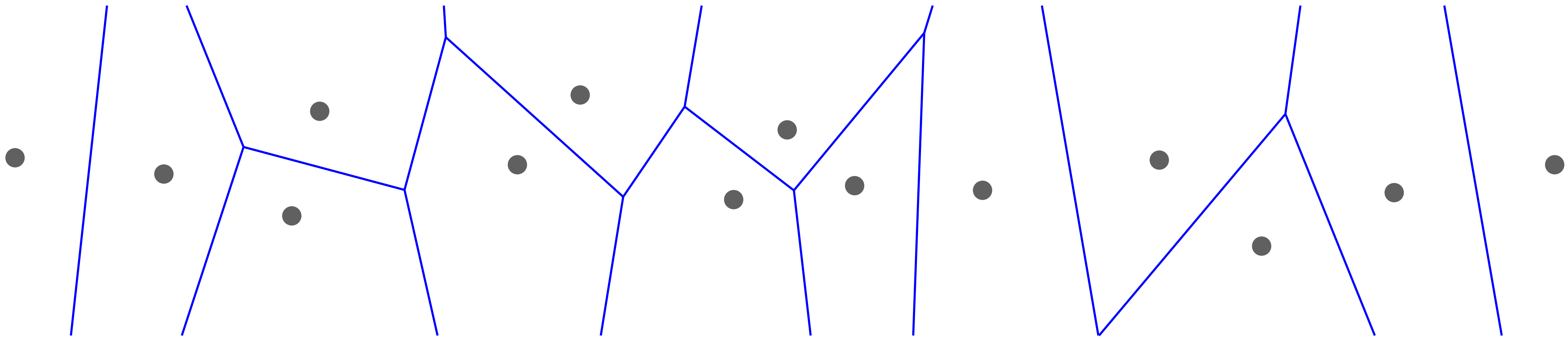
Travaux précédents

1. algorithmes basés Voronoi :

– Amenta et Bern, 1999, Surface reconstruction by Voronoi filtering

– Cohen-Steiner et al., 2007,Voronoi-based Variational Reconstruction

– Merigot et al., 2009,Robust Voronoi-based Curvature and Feature Estimation



2. Distance à une mesure :

– Merigot et al., 2010,Geometric Inference for probability measure

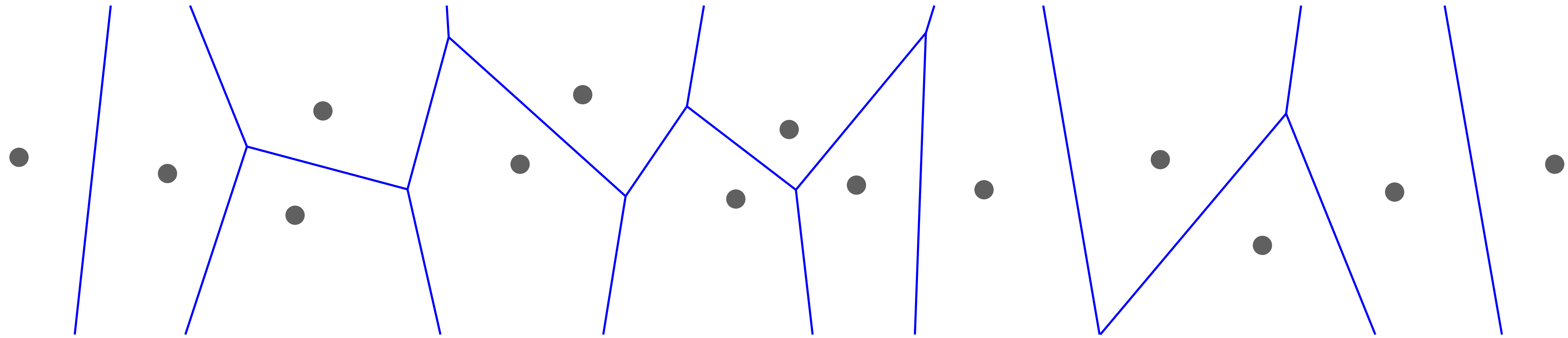
Travaux précédents

1. algorithmes basés Voronoi :

– Amenta et Bern, 1999, Surface reconstruction by Voronoi filtering

– Cohen-Steiner et al., 2007,Voronoi-based Variational Reconstruction

– Merigot et al., 2009,Robust Voronoi-based Curvature and Feature Estimation

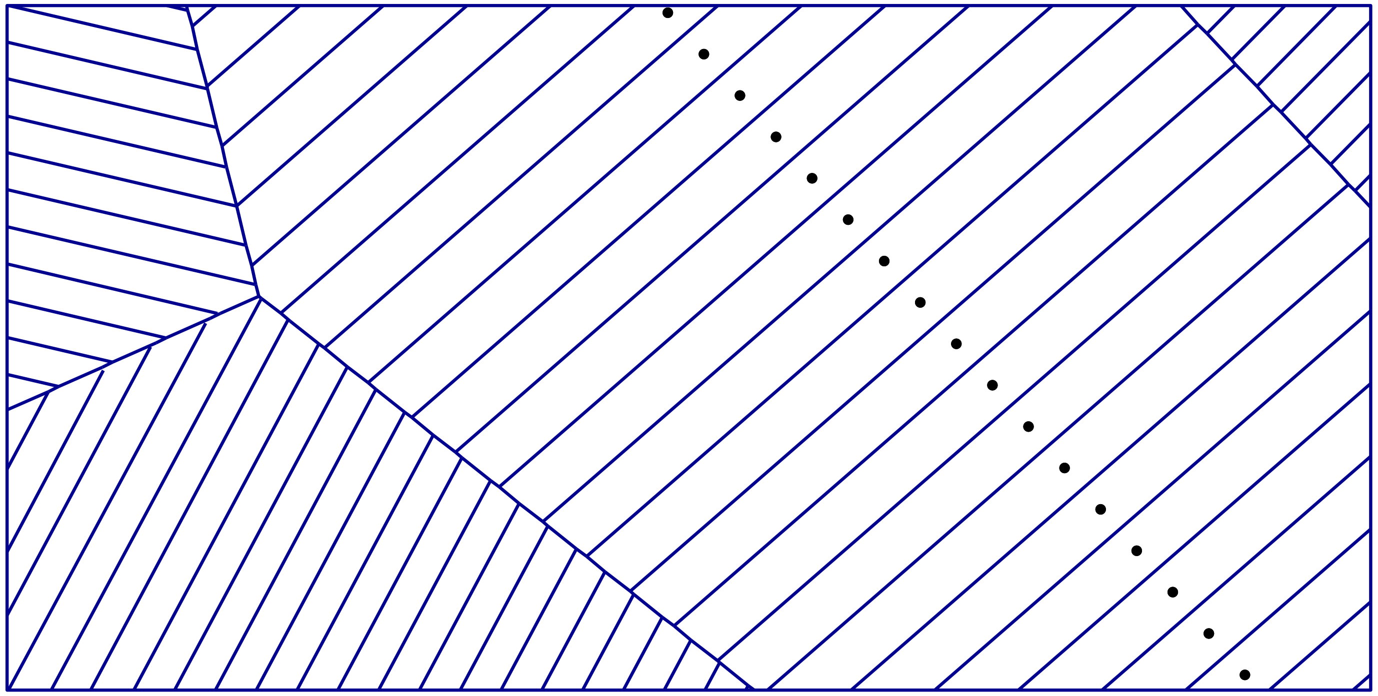


2. Distance à une mesure :

– Merigot et al., 2010,Geometric Inference for probability measure

Notre approche $= 1 + 2$

Normal estimation based on Voronoi

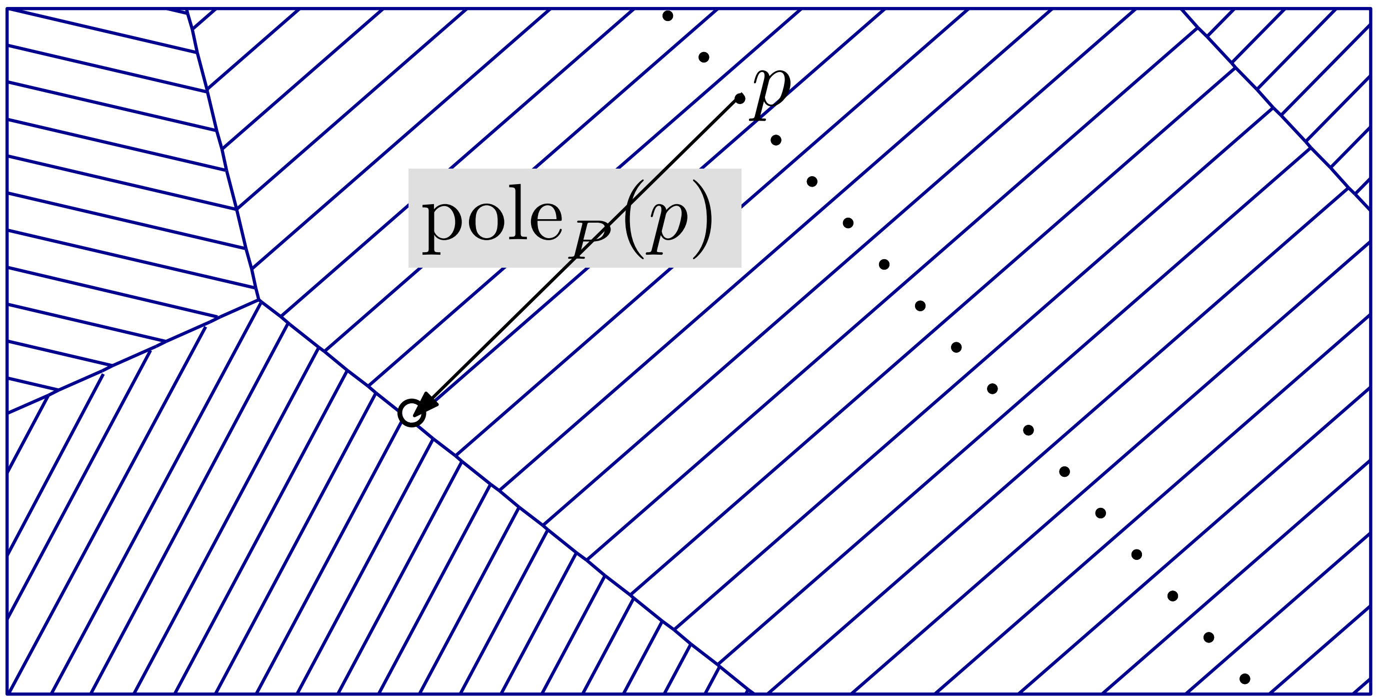


$$P = \{p_1, \ldots, p_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

Définition :

Voronoi cell: $\mathrm{Vor}^P(q) =$ points whose closest point in P is q

Normal estimation based on Voronoi



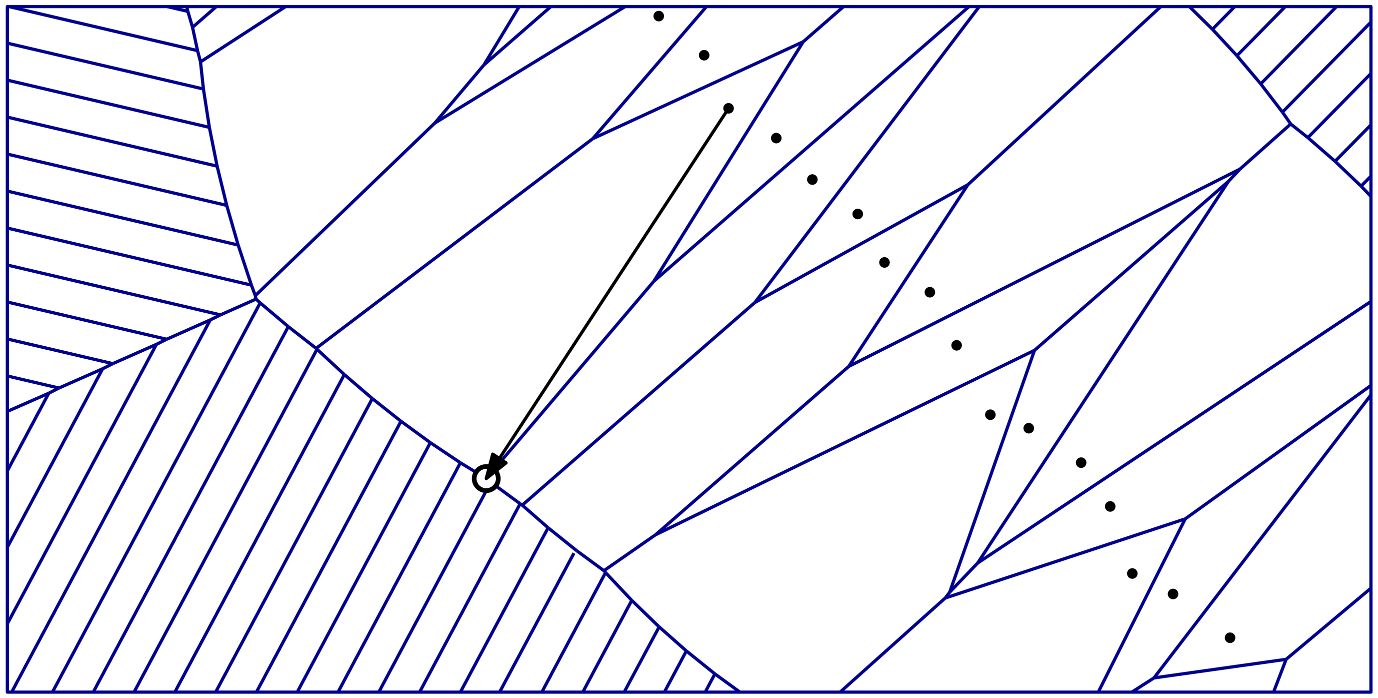
$P = \{p_1, \ldots, p_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$

Définition :
Voronoi cell: $\mathrm{Vor}^P(q) =$ points whose closest point in P is q

$\mathrm{pole}_P(p) :=$ le point le plus loin de p dans $\mathrm{Vor}_P(p)$

Amenta, Bern, *Discrete and Computational Geometry* **22** (1999)

Normal estimation based on Voronoi



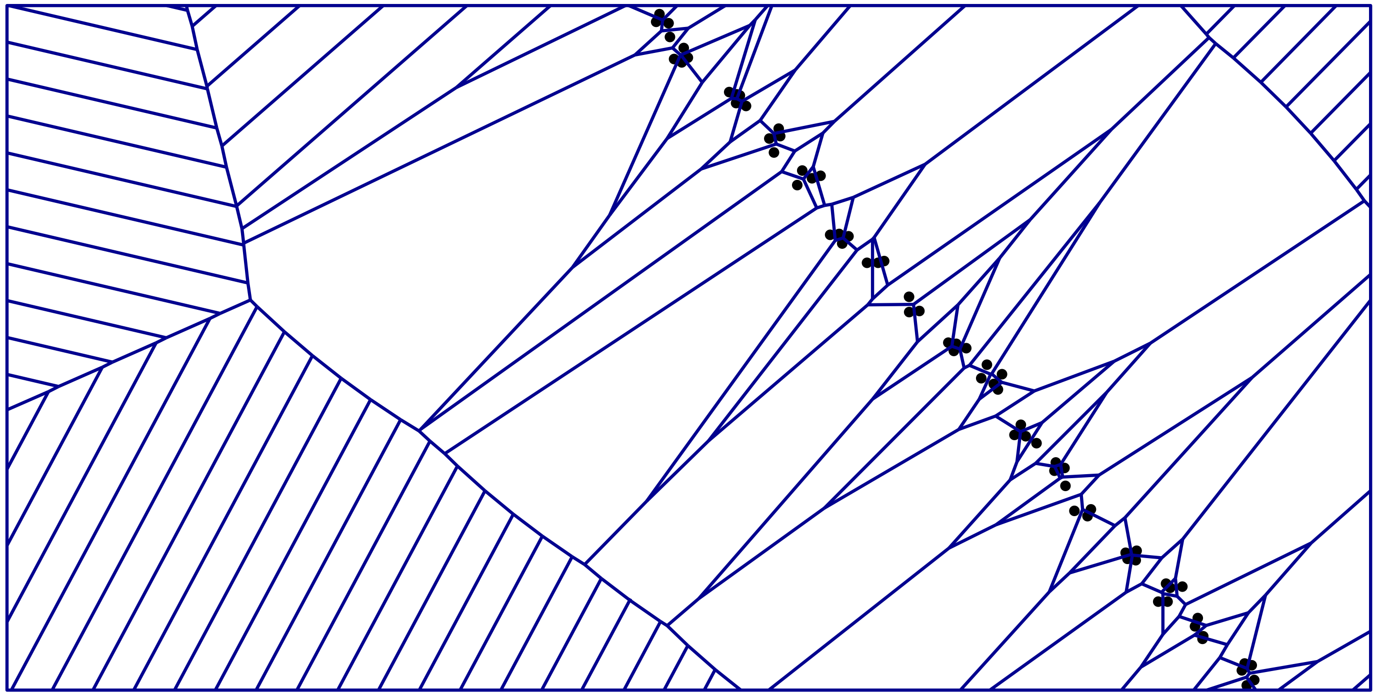
$P = \{p_1, \ldots, p_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$

Définition :
Voronoi cell: $\mathrm{Vor}^P(q)$ = points whose closest point in P is q

$\mathrm{pole}_P(p) :=$ le point le plus loin de p dans $\mathrm{Vor}_P(p)$

Amenta, Bern, *Discrete and Computational Geometry* **22** (1999)

Normal estimation based on Voronoi



$P = \{p_1, \ldots, p_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$

Définition :
Voronoi cell: $\mathrm{Vor}^P(q)$ = points whose closest point in P is q

$\mathrm{pole}_P(p) :=$ le point le plus loin de p dans $\mathrm{Vor}_P(p)$

Amenta, Bern, *Discrete and Computational Geometry* **22** (1999)

idée : intégrer pour obtenir de la stabilité.

Voronoi Covariance

Alliez, Cohen-Steiner, Tong, Desbruns, Proc. Symposium Geometry Processing 2007

Matrice de Covariance: $\mathrm{cov}_p(\Omega) := \int_\Omega (x-p)(x-p)^{\mathbf{t}} \,\mathrm{d}\, x$.

Les vecteurs propres de $\mathrm{cov}_p(\Omega)$ sont les **axes principales** de Ω (vu depuis p).

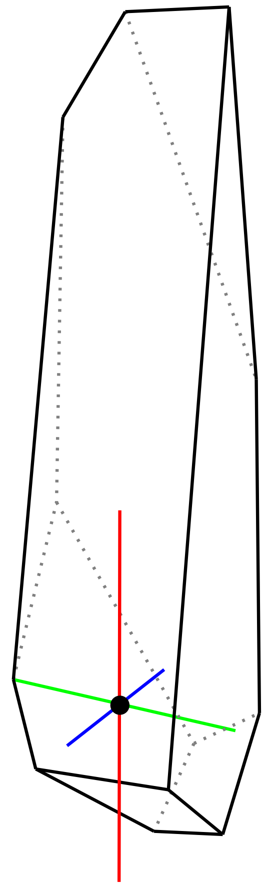
Voronoi Covariance

Alliez, Cohen-Steiner, Tong, Desbruns, Proc. Symposium Geometry Processing 2007

Matrice de Covariance: $\mathrm{cov}_p(\Omega) := \int_\Omega (x-p)(x-p)^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x$.

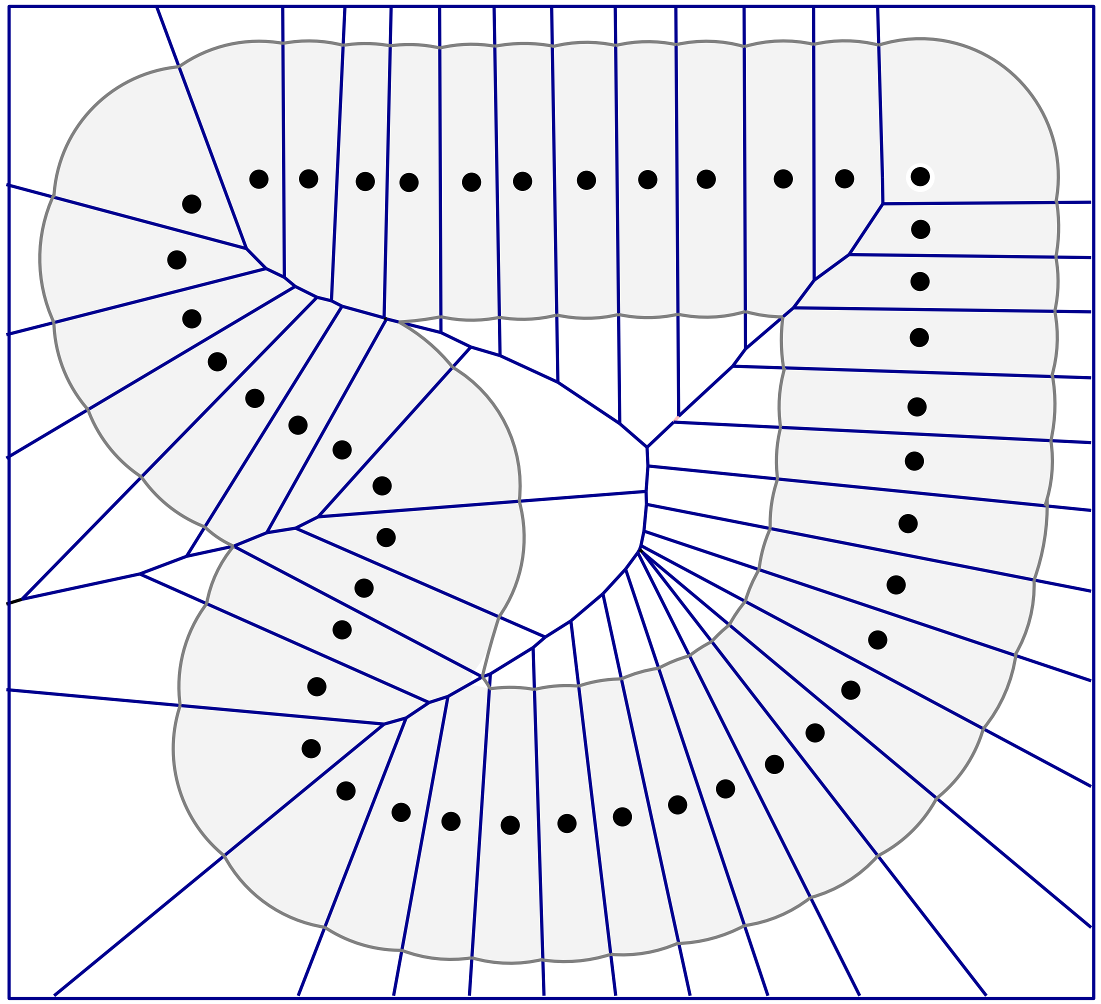
Les vecteurs propres de $\mathrm{cov}_p(\Omega)$ sont les **axes principales** de Ω (vu depuis p).

Algorithm:



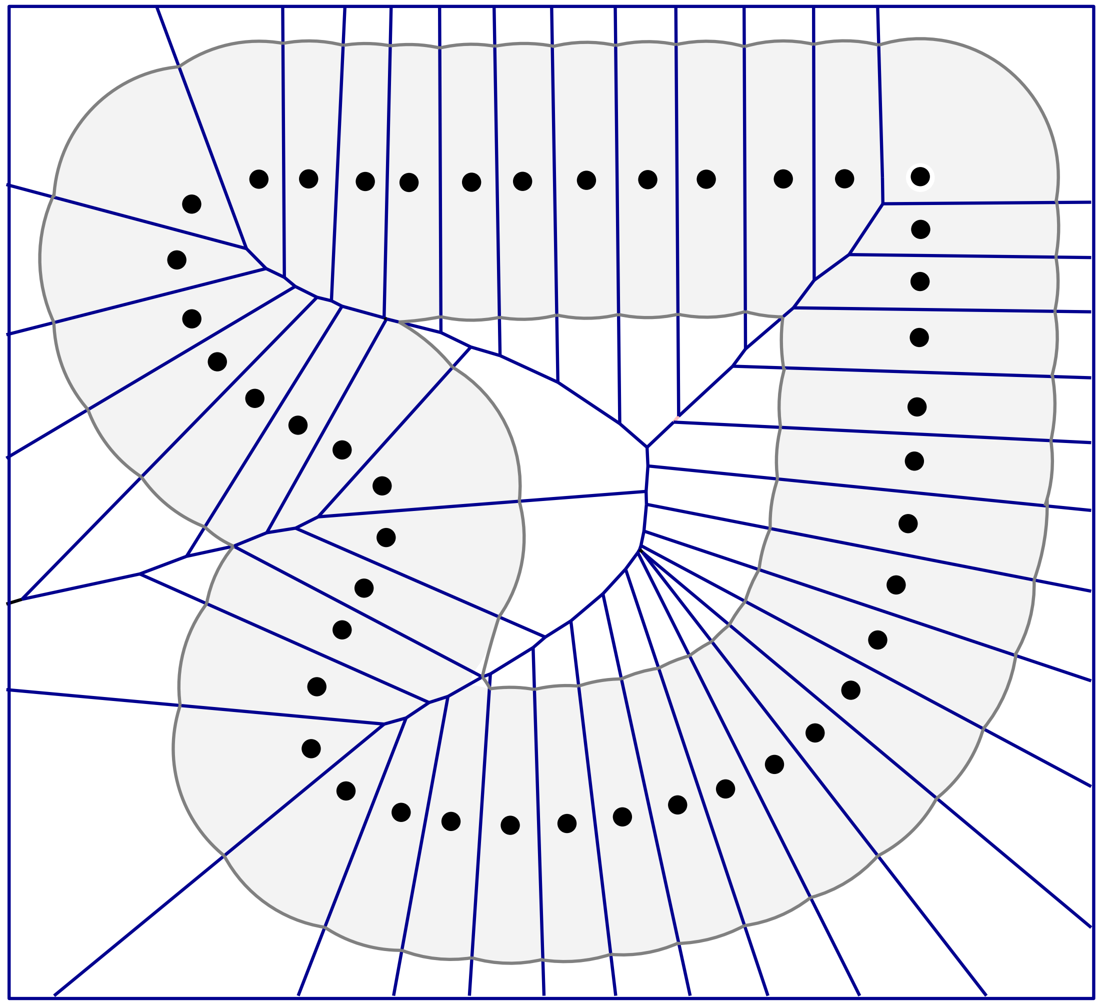
- Ils considère : $\Omega = \mathrm{Vor}_P(p_i) \cap E$
- La normale est estimé par le vecteur propre correspondant la plus grande valeur propre (en rouge).
- Pour la stabilité au bruit, ils somment les matrice sur un voisinnage.

Voronoi covariance measure



Definition: L'offset de P de rayon R est $P^R = \cup_{p \in P} \mathrm{B}(p, R)$.

Voronoi covariance measure



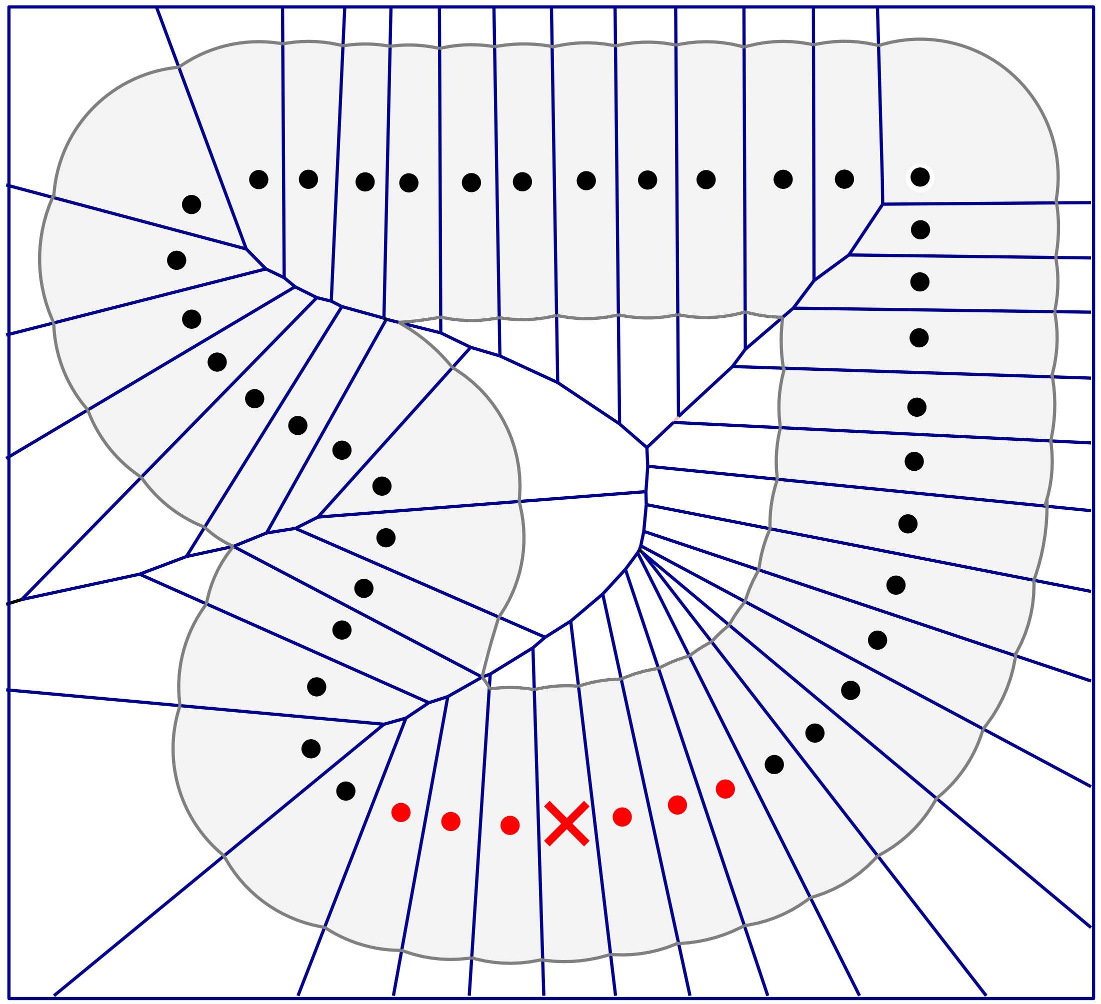
Definition: L'offset de P de rayon R est $P^R = \cup_{p \in P} \mathrm{B}(p, R)$.

$$A(p) := \mathrm{cov}_p(\mathrm{Vor}_P(p_i) \cap P^R)$$

Definition: Le *voronoi covariance measure* de P de rayon d'offset R est

$$\mathcal{V}(P, R) := \sum_{i=1}^{N} A(p)\delta_p$$

Voronoi covariance measure



Definition: L'offset de P de rayon R est $P^R = \cup_{p \in P} \mathrm{B}(p, R)$.

$$A(p) := \mathrm{cov}_p(\mathrm{Vor}_P(p_i) \cap P^R)$$

Definition: Le *voronoi covariance measure* de P de rayon d'offset R est

$$\mathcal{V}(P, R) := \sum_{i=1}^{N} A(p)\delta_p$$

$$\mathcal{V}(P, R) * \chi_r(p) := \sum_{p_i \in B(p,r)} A(p_i)$$

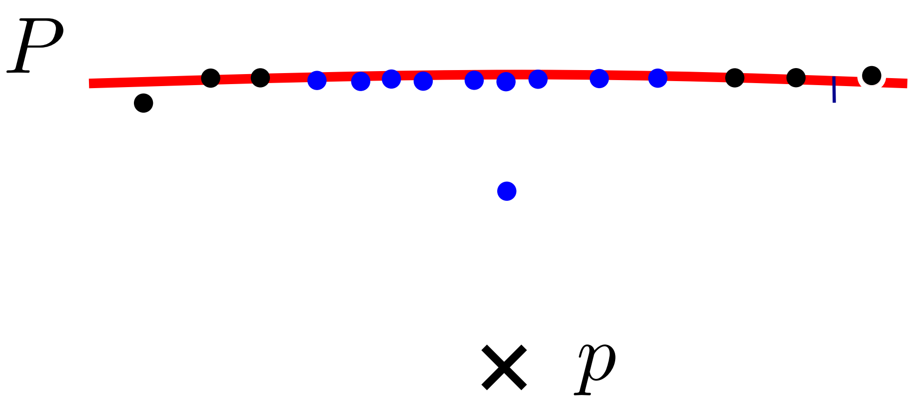
Le VCM est défini pour tout compact.

Theorem: Soit P, K deux compacts et $p \in \mathbb{R}^d$.

$$\|\mathcal{V}(P, R) * \chi_r(p) - \mathcal{V}(K, R) * \chi_r(p)\| = \mathrm{O}(\mathrm{d_H}(K, P)^{\frac{1}{2}})$$

Merigot et al., 2009,Robust Voronoi-based Curvature and Feature Estimation

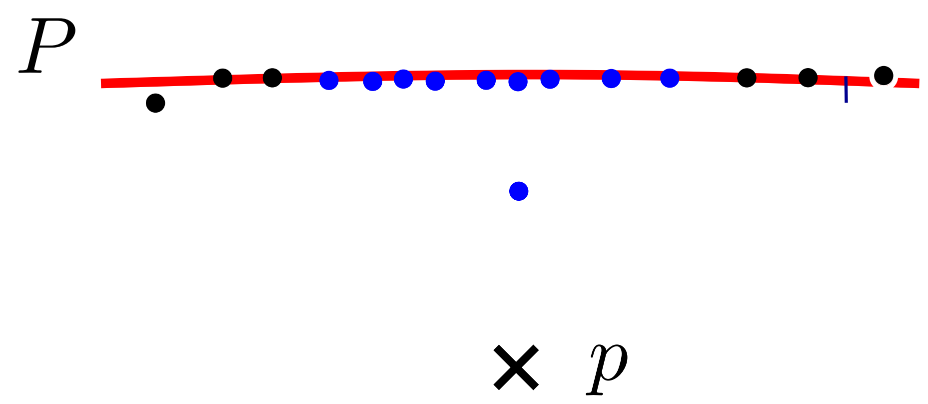
Distance à une mesure



Definition: La distance à une mesure de paramètre k (ou k-distance) est défini par :

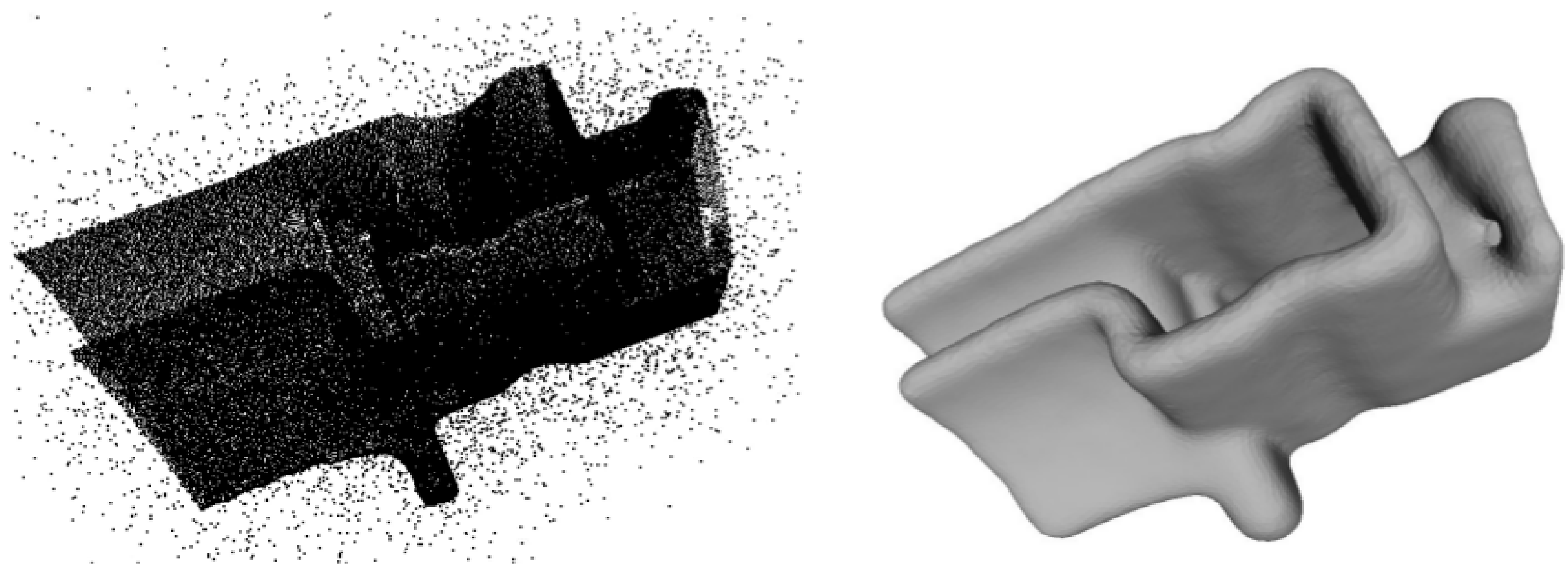
$$d^2_{k,P}(p) = \frac{1}{k}\sum_{p_i \in NN_k(p)} ||p - p_i||^2$$

Distance à une mesure



Definition: La distance à une mesure de paramètre k (ou k-distance) est défini par :

$$d^2_{k,P}(p) = \frac{1}{k} \sum_{p_i \in NN_k(p)} ||p - p_i||^2$$



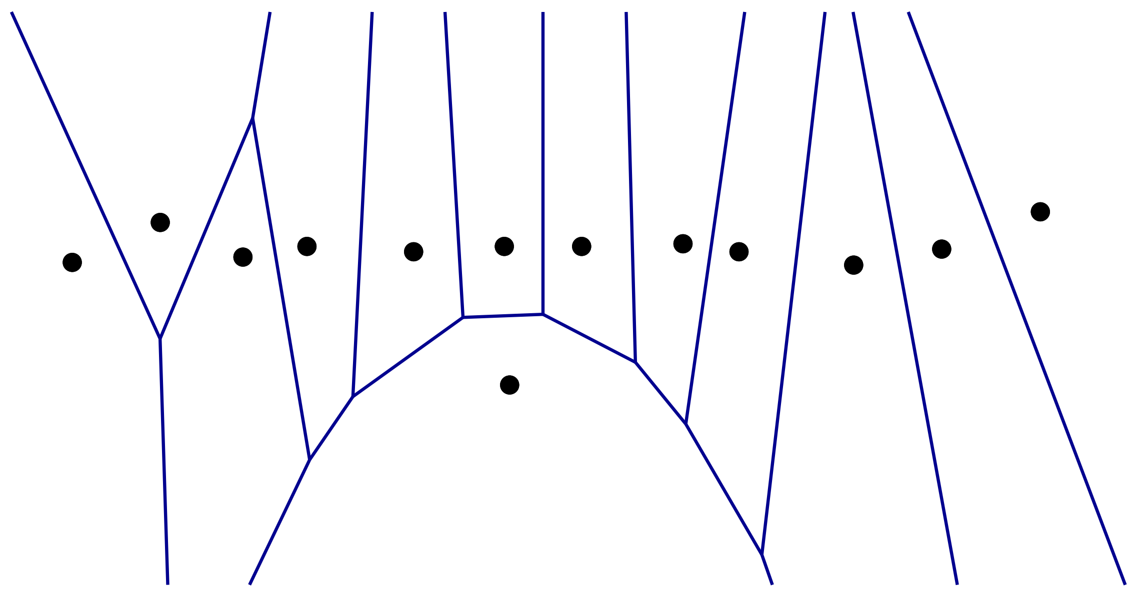
Théorème : soit P, K deux ensembles compacts et $\mathbb{R}^d$.

$$\|d_{P,k} - d_{K,k}\| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} W_2(\mu_P, \mu_K)$$

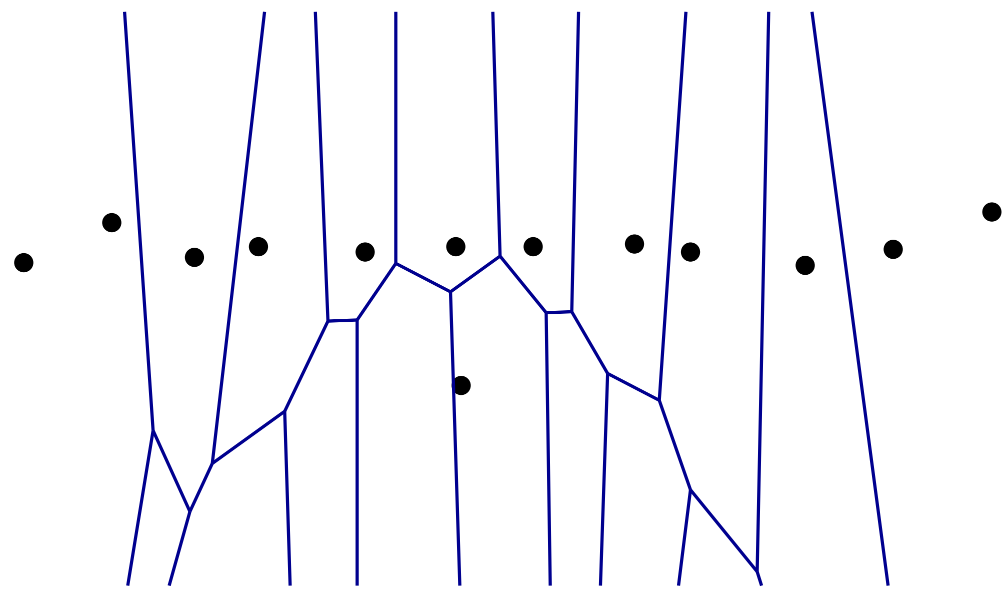
Mérigot, Travaux de thèse(2008)

k-Voronoi covariance measure

VCM

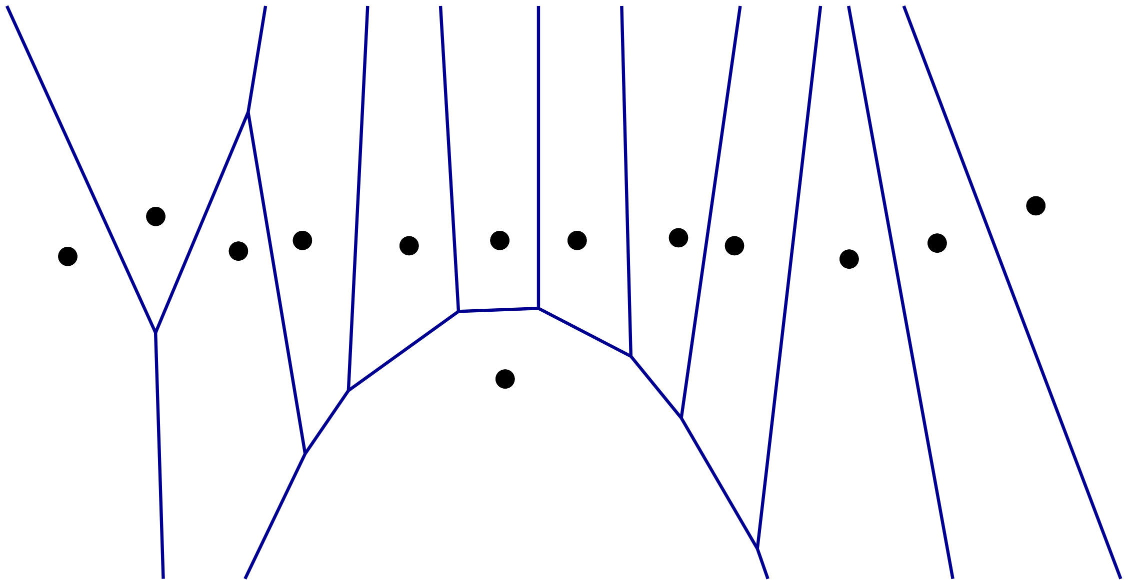


k-VCM



k-Voronoi covariance measure

VCM

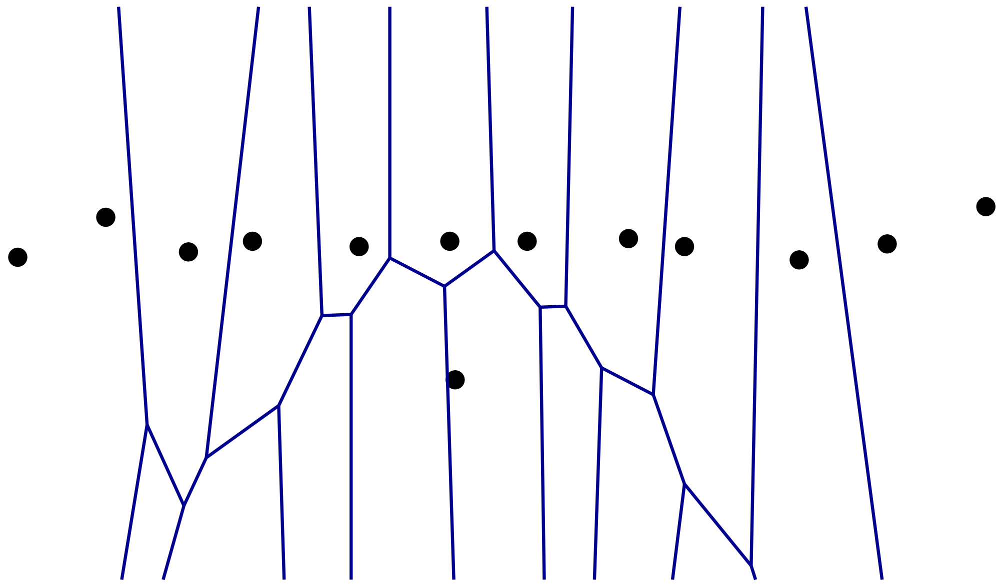


A(p):=

$$\int_{\mathrm{Vor}_P(p)\cap P^R} (x-\pi(x))(x-\pi(x))^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x.$$

$\mathcal{V}(P,\, R) * \chi_r(p) := \sum_{p_i \in B(p,r)} A(p_i)$

k-VCM



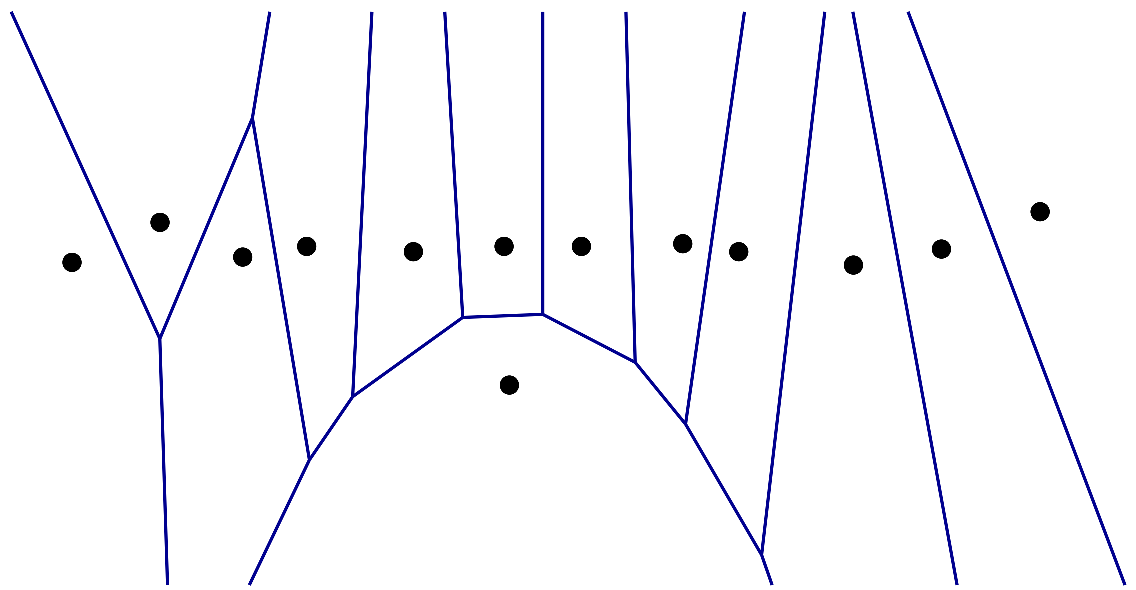
$A_k(p) :=$

$$\int_{\mathrm{Vor}_k^P(p)\cap \tilde{P}^R} (x-\pi_k(x))(x-\pi_k(x))^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x.$$

$\mathcal{V}_k(P,\, R) * \chi_r(p) := \sum_{p_i \in B(p,r)} A_k(p_i)$

k-Voronoi covariance measure

VCM



A(p):=

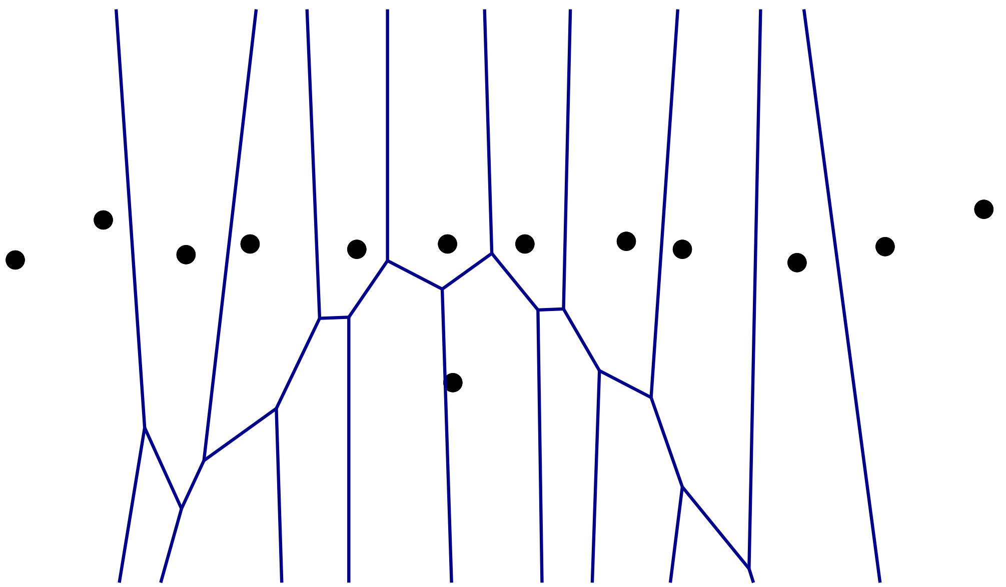
$$\int_{\mathrm{Vor}_P(p)\cap P^R} (x-\pi(x))(x-\pi(x))^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x.$$

$\mathcal{V}(P,R) * \chi_r(p) := \sum_{p_i \in B(p,r)} A(p_i)$

Théoreme: Soit P, K compacts et $p \in \mathbb{R}^d$.

$$\|\mathcal{V}(P,R) * \chi_r(p) - \mathcal{V}(K,R) * \chi_r(p)\| = \mathrm{O}(\mathrm{d_H}(K,P)^{\frac{1}{2}})$$

k-VCM



$A_k(p) :=$

$$\int_{\mathrm{Vor}_k^P(p)\cap \tilde{P}^R} (x-\pi_k(x))(x-\pi_k(x))^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x.$$

$\mathcal{V}_k(P,R) * \chi_r(p) := \sum_{p_i \in B(p,r)} A_k(p_i)$

Théoreme: Soit P, K compacts et $p \in \mathbb{R}^d$.

$$\|\mathcal{V}_k(P,R) * \chi_r(p) - \mathcal{V}(K,R) * \chi_r(p)\| = \mathrm{O}(\|d_{P,k} - d_K\|_\infty^{\frac{1}{2}})$$

Preuve du théorème de stabilité

$$\int_{\mathrm{Vor}_k^P(p)\cap d_{P,k}^{-1}([0,R])} (x-\pi_k^P(x))(x-\pi_k^P(x))^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x - \int_{\mathrm{Vor}^K(p)\cap K^R} (x-\pi^K(x))(x-\pi^K(x))^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x$$

- Contrôler la différence symétrique des deux domaines d'intégration :

$$\left[\mathrm{Vor}_k^P(p)\cap d_{P,k}^{-1}([0,R])\right] \triangle \left[\mathrm{Vor}_k^K(p)\cap K^R\right] = O(\|d_{P,k}-d_K\|_\infty)$$

Preuve du théorème de stabilité

$$\int_{\mathrm{Vor}_k^P(p)\cap d_{P,k}^{-1}([0,R])}(x-\pi_k^P(x))(x-\pi_k^P(x))^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x-\int_{\mathrm{Vor}^K(p)\cap K^R}(x-\pi^K(x))(x-\pi^K(x))^{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\,x$$

- Contrôler la différence symétrique des deux domaines d'intégration :

$$\left[\mathrm{Vor}_k^P(p)\cap d_{P,k}^{-1}([0,R])\right]\triangle\left[\mathrm{Vor}_k^K(p)\cap K^R\right]=O(\|d_{P,k}-d_K\|_\infty)$$

- Contrôler le terme : $\|\pi_k^P(x)-\pi^K(x)\|$

- **Théorème :** f et g localement convexes sur E tq $diam(\nabla f(E)\cup\nabla g(E))$ est borné, alors

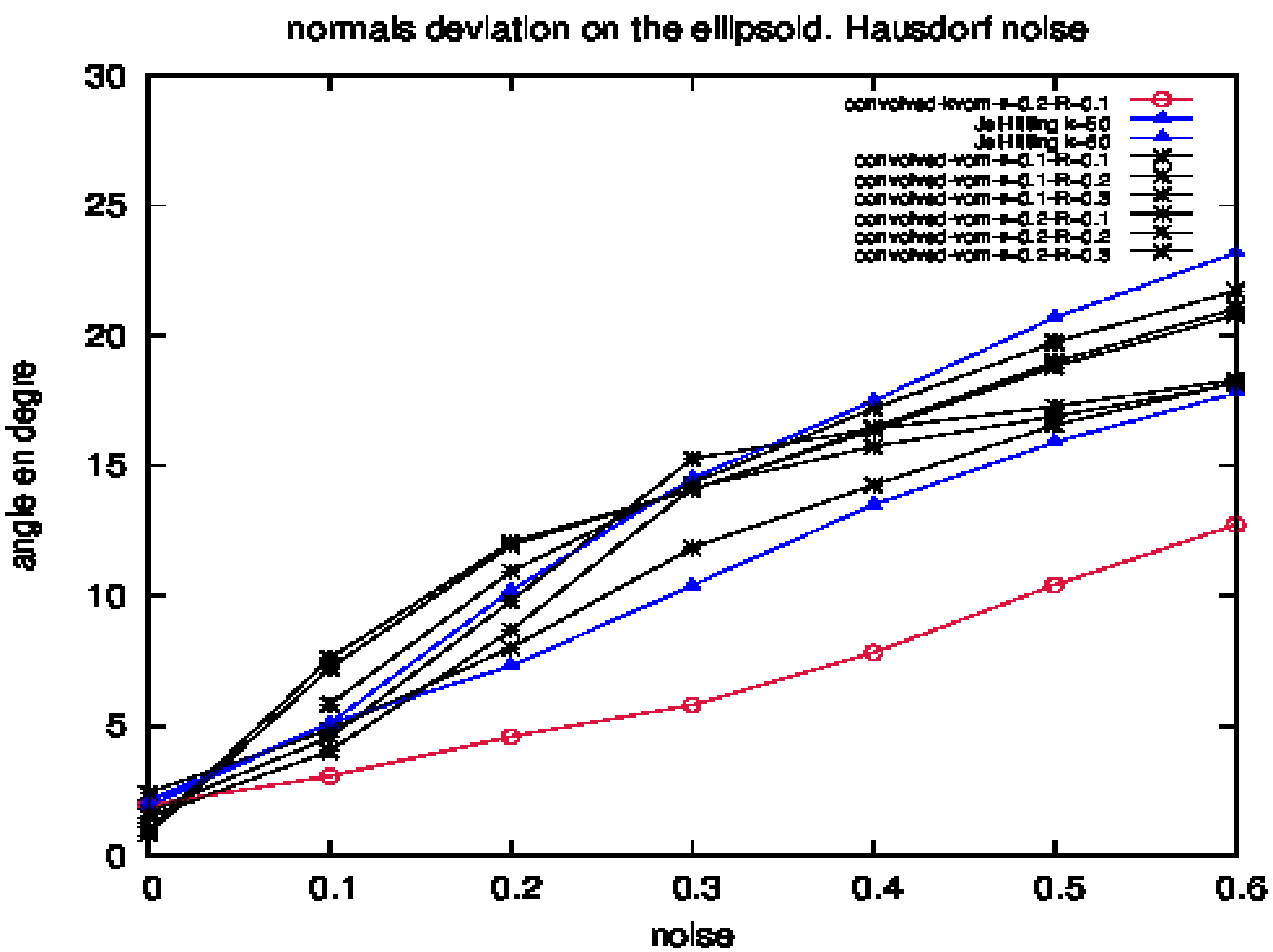
$$\|\nabla f-\nabla g\|_{L_1(E)}=O(\|f-g\|_\infty^{\frac{1}{2}})$$

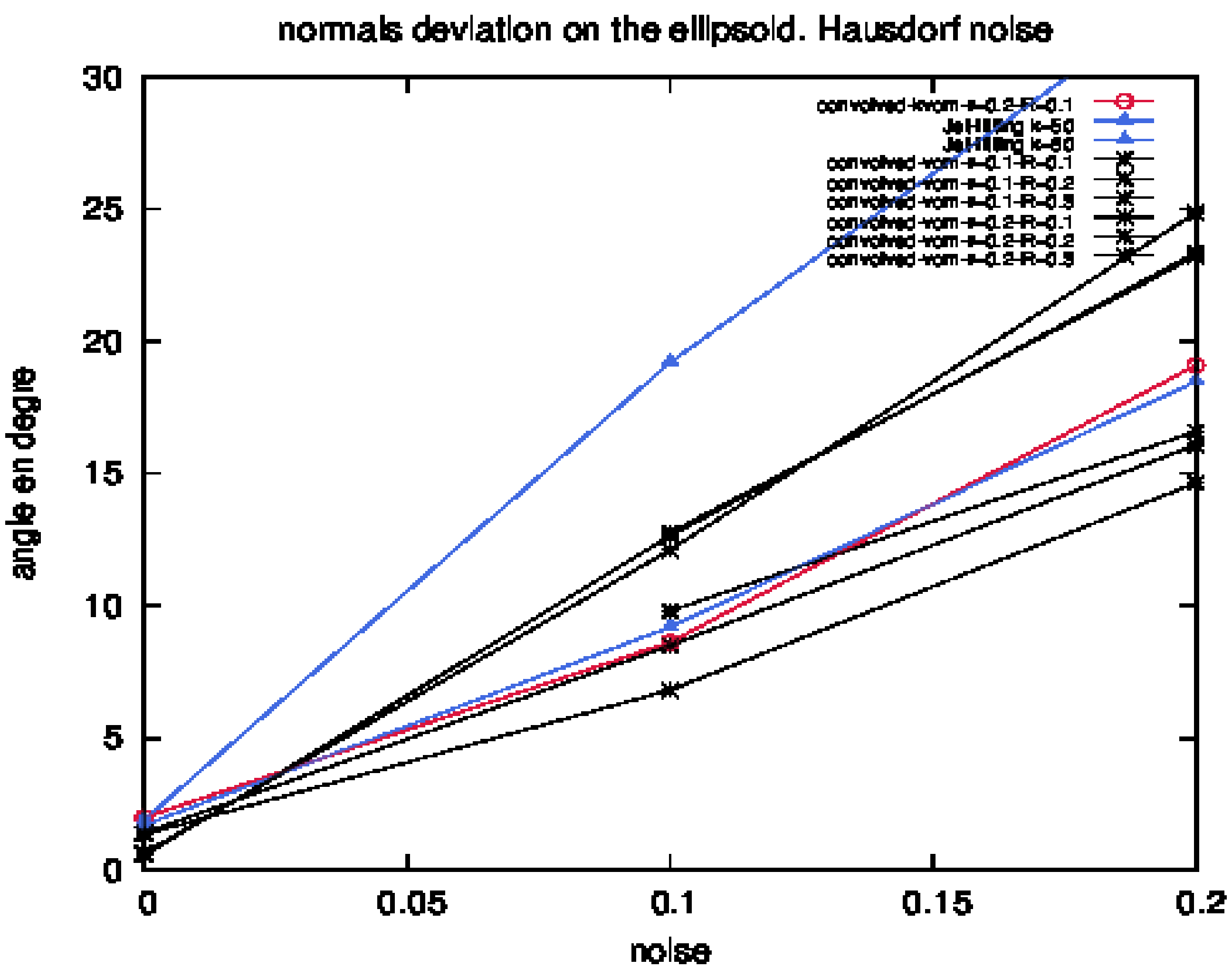
Mérigot et al., (2010)

Federer, Curvature measure (1959)

Estimation de Normale : Ellipsoide

Déviation de la normale en fonction du bruit.
Comparaison avec le Jet fitting et le VCM.





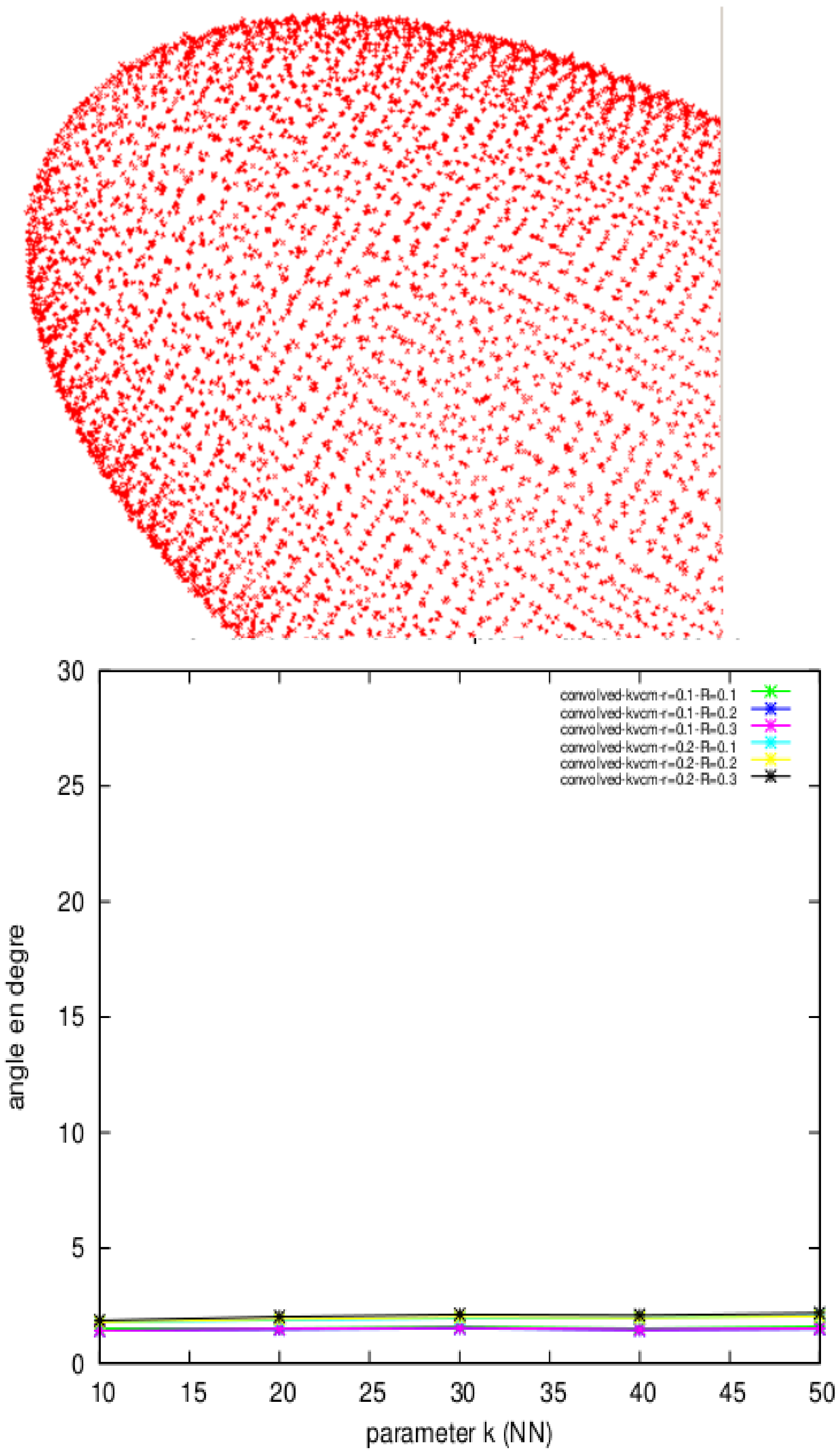
bruit Hausdorff + outliers

bruit Gaussien

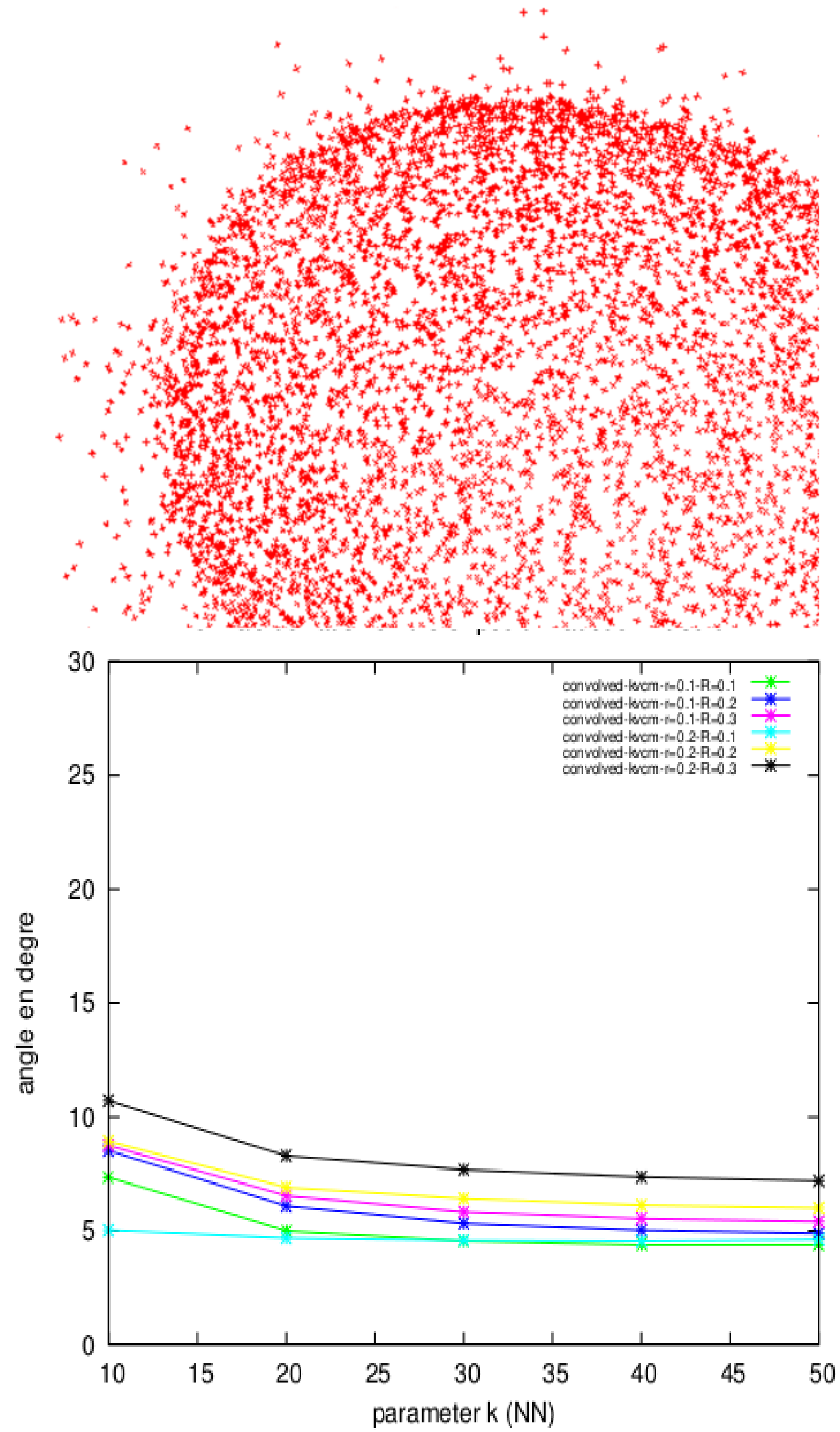
– $10k$ points

Estimation de Normale : Ellipsoide

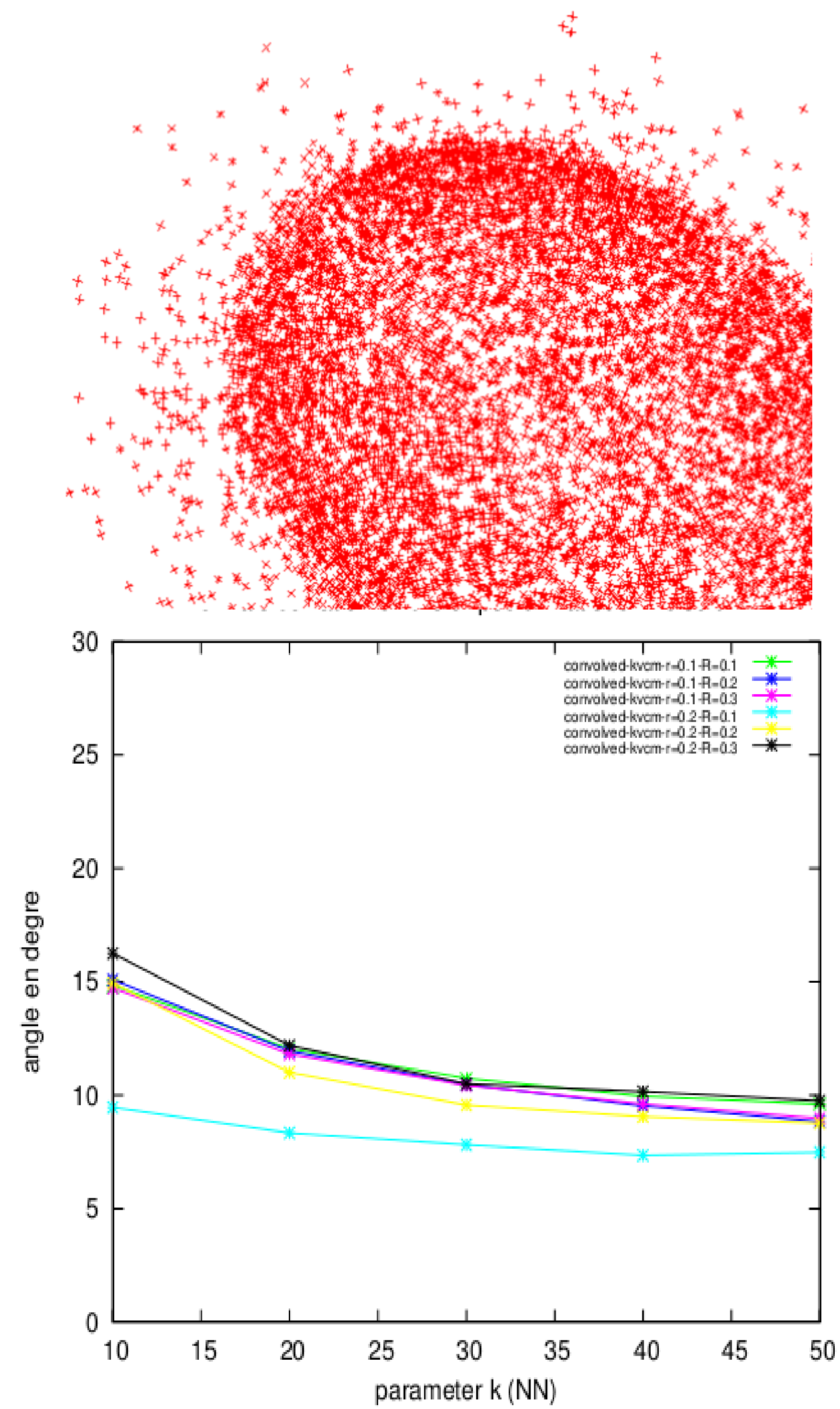
Sensibilité aux paramètres.



$\varepsilon = 0$

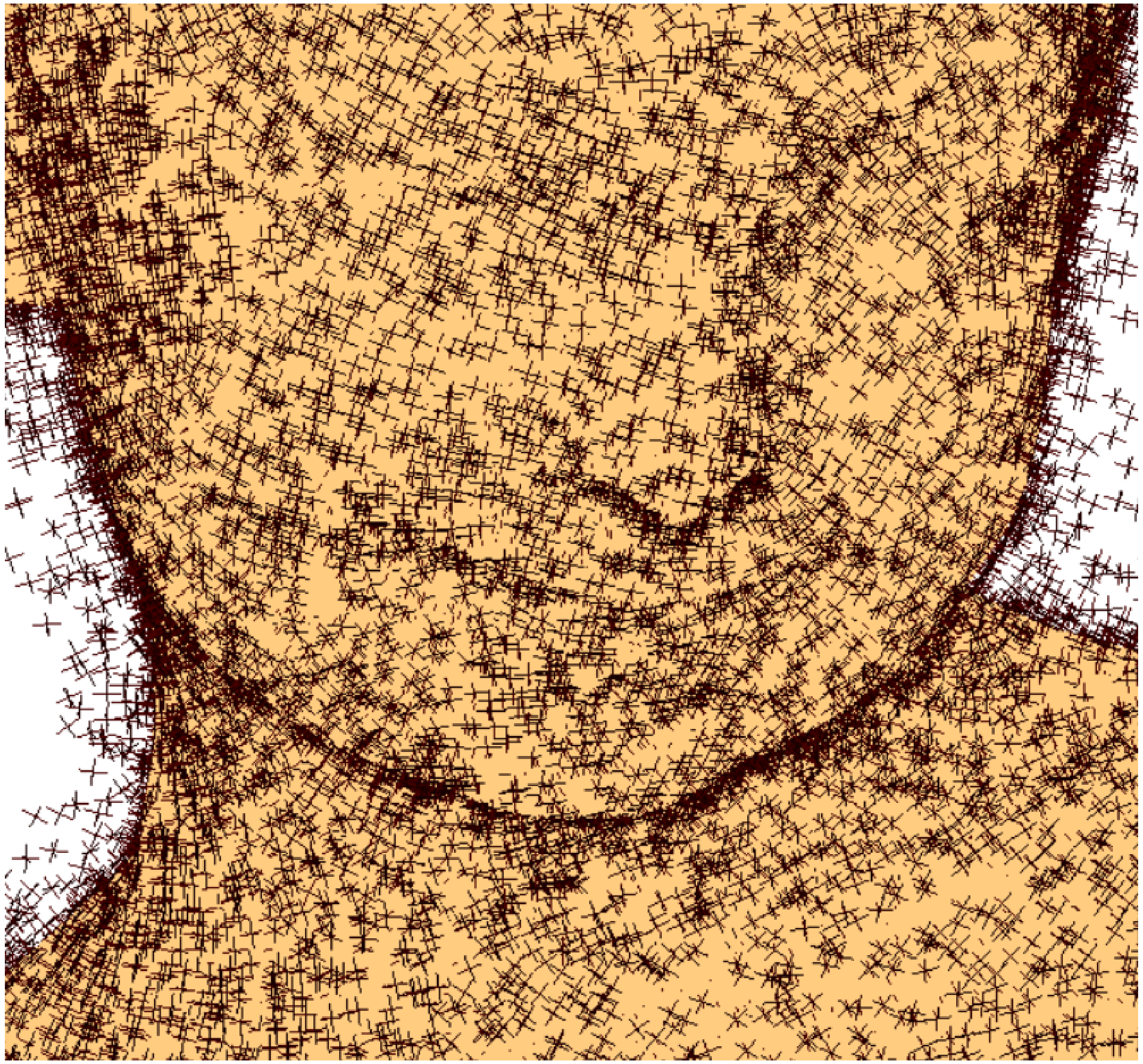


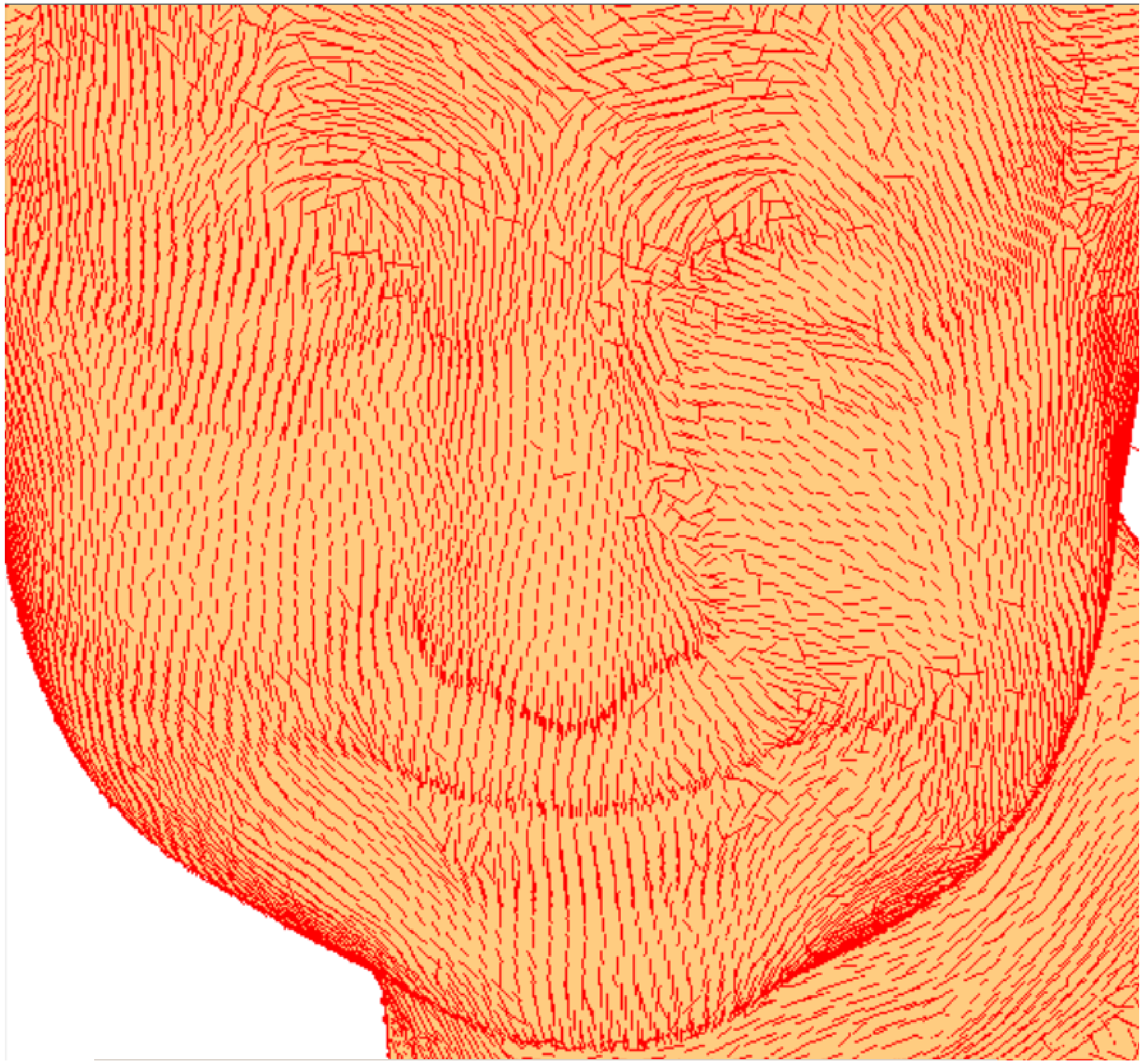
$\varepsilon = 0.2$



$\varepsilon = 0.4$

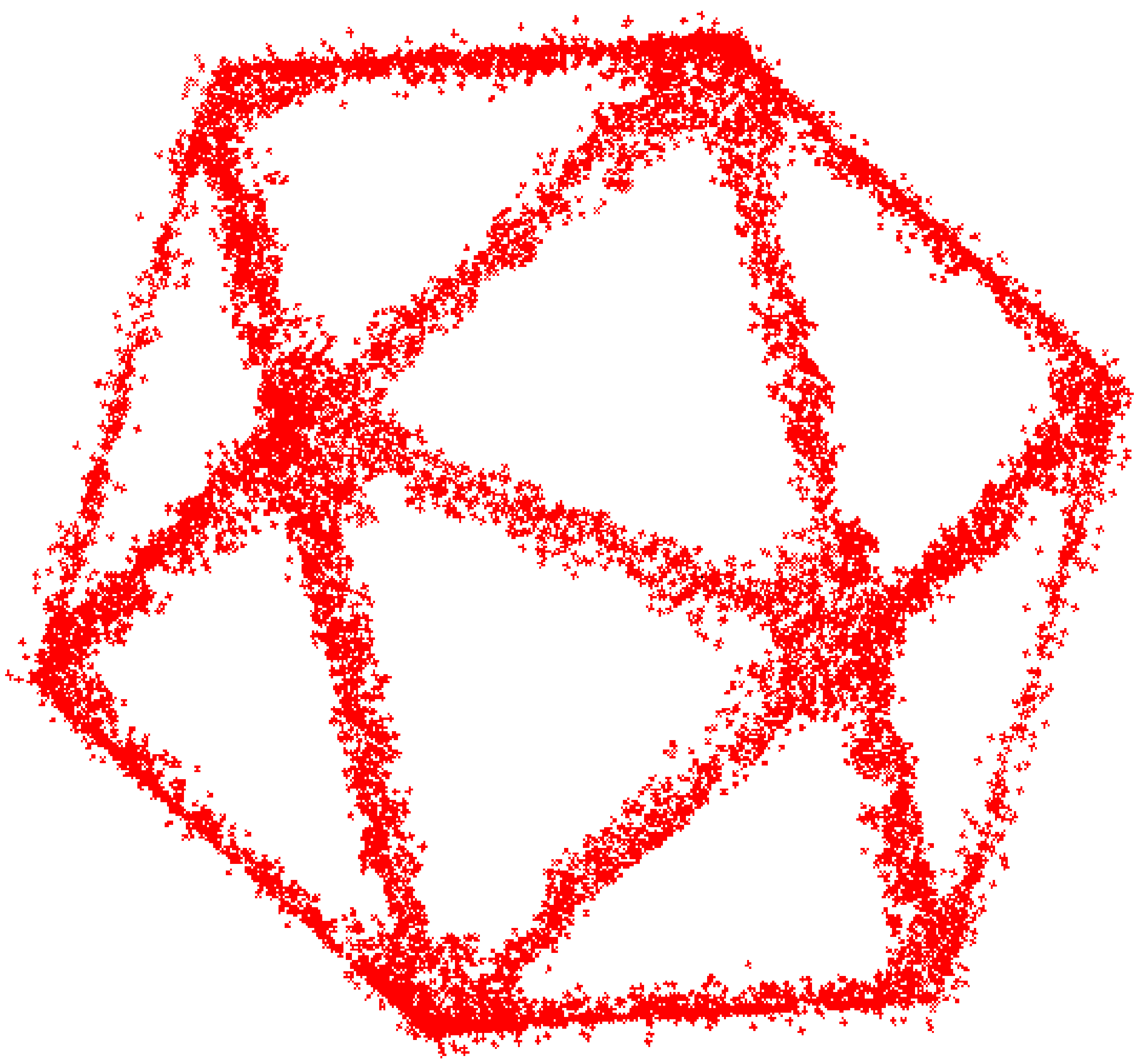
Estimation des directions de courbure



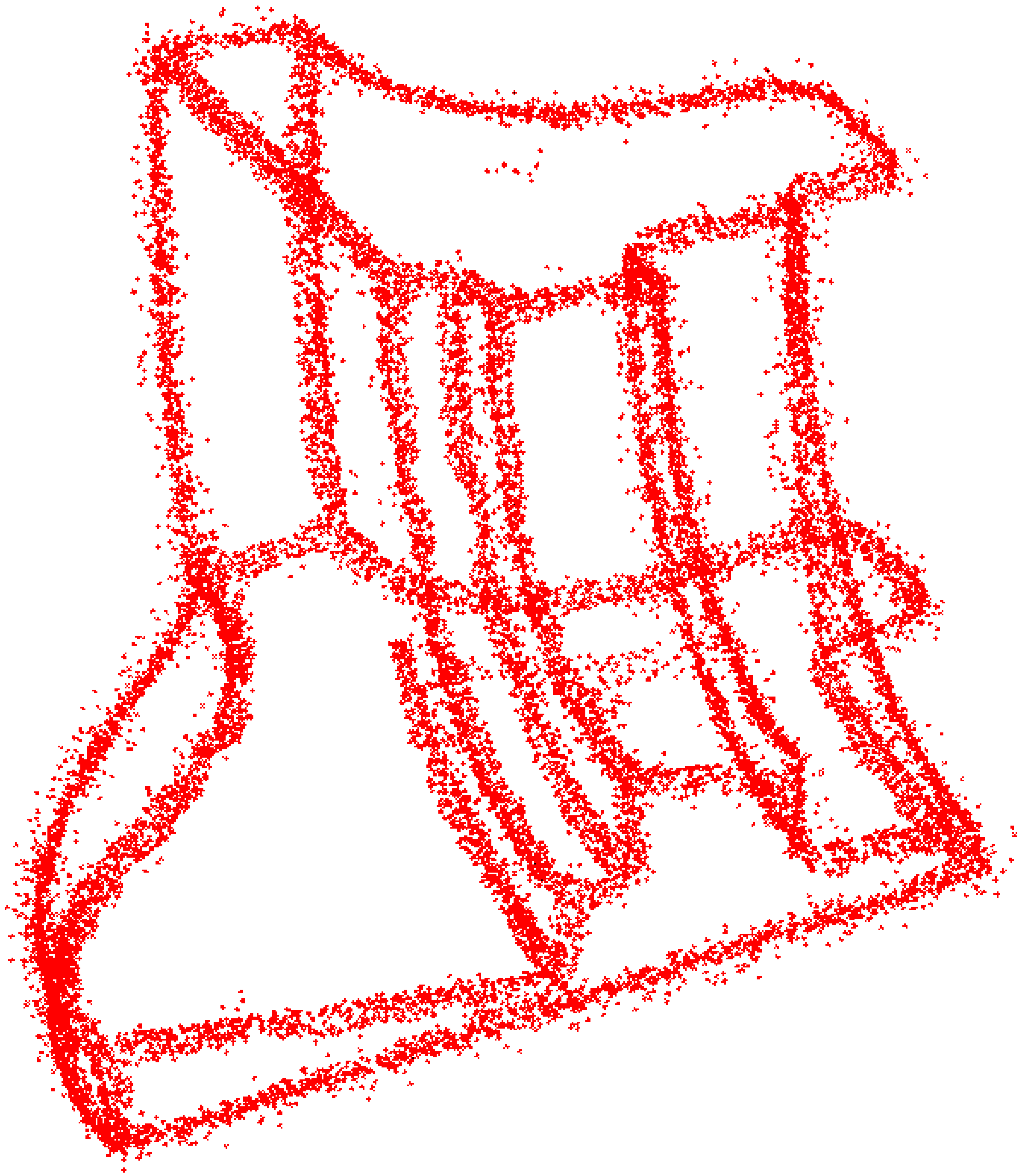


Bimba 100k points

Détection des arêtes



dodécaèdre 50k points



fandisk 50k points

Conclusion

Résumé:

- Le k-VCM est un outil qui permet l'estimation des normale, directions de courbure sur un nuage de points.
- Stable au bruit Hausdorff et aux outliers.

Conclusion

Résumé:

- Le k-VCM est un outil qui permet l'estimation des normale, directions de courbure sur un nuage de points.
- Stable au bruit Hausdorff et aux outliers.

Prochain travaux:

- Gestion des paramètres k, R et r.
- Appliquer la méthode à des ensembles de pixels/voxels.