

Algèbre Géométrique et Informatique Graphique

Laurent Fuchs

XLIM-SIC
Université de Poitiers

JIG 2013 Nancy
14-15 Novembre 2013

Introduction

Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle
 - Exprimer les relations géométriques à l'aide d'équations algébriques :

Introduction

Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle
 - Exprimer les relations géométriques à l'aide d'équations algébriques :



1844
Hamilton



1844
Grassmann



1870
Clifford

Introduction

Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle
 - Exprimer les relations géométriques à l'aide d'équations algébriques :



1844
Hamilton



1844
Grassmann



1870
Clifford



Début XXIème
siècle Dirac et Pauli

Introduction

Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle
 - Exprimer les relations géométriques à l'aide d'équations algébriques :



1844
Hamilton



1844
Grassmann



1870
Clifford



Début XXIème
siècle Dirac et Pauli



1941
Forder

Introduction

Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle
 - Exprimer les relations géométriques à l'aide d'équations algébriques :



1844
Hamilton



1844
Grassmann



1870
Clifford



Début XXIème
siècle Dirac et Pauli



1941
Forder



1966
Hestenes

Introduction

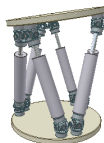
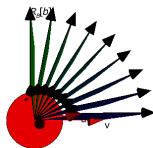
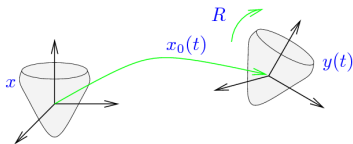
Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle.
- Applications :
 - Astronomie, Physique, Vision, Traitement d'images, Robotique

Introduction

Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle.
- Applications :
 - Astronomie, Physique, Vision, Traitement d'images, Robotique



Introduction

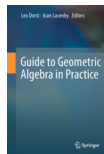
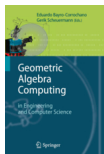
Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle.
- Applications :
 - Astronomie, Physique, Vision, Traitement d'images, Robotique



Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle.
- Applications :
 - Astronomie, Physique, Vision, Traitement d'images, Robotique



Bayro-Corrochano, E. and Scheuermann, G. (Eds.)

Geometric Algebra Computing,
Springer, 2010



Dorst, L. and Lasenby, J. (Eds.)

Guide to Geometric Algebra in Practice,
Springer, 2011

Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle.
- Applications :
 - Astronomie, Physique, Vision, Traitement d'images, Robotique
- Introduite en Informatique Graphique au début des années 2000.
 - Hestenes, Rockwood, Dorst, Lasenby, Goldman, Mann

Algèbre Géométrique

- Issue de travaux du XIX siècle.
- Applications :
 - Astronomie, Physique, Vision, Traitement d'images, Robotique
- Introduite en Informatique Graphique au début des années 2000.
 - Hestenes, Rockwood, Dorst, Lasenby, Goldman, Mann



Leo Dorst, Daniel Fontijne and Stephen Mann

Geometric Algebra for Computer Science : An Object Oriented Approach to Geometry,

Morgan Kaufmann Publishers, 2007



“Faire” de la géométrie

- Décrire des primitives : points, droites, plans, cercles, sphères tangentes.
- Constructions de “base” : intersections, incidences
- Opérations : translation, rotations, réflexions, projections
- Propriétés : tailles, positions, orientations
- Pratiques numériques : approximations, interpolations

Espace vectoriel \mathbb{R}^n

- Ensemble de vecteurs muni d'opérations sur les vecteurs

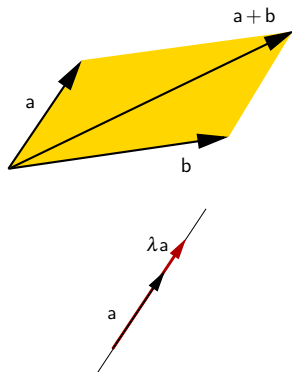
- Addition de vecteurs :
 $a + b$

- Multiplication par un scalaire

Distributive sur l'addition :

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$

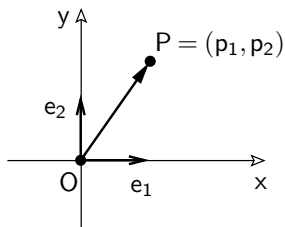


Géométrie euclidienne

Algèbre linéaire

Représentation de l'espace "usuel" : dimension 2

- On choisit une origine \mathcal{O} et une base $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$
- On obtient un système de coordonnées : un point $P = (p_1, p_2)$ est représenté par son vecteur position $\overrightarrow{\mathcal{O}P} = p_1 e_1 + p_2 e_2$



- On peut comparer des vecteurs qui sont parallèles ($b = \lambda a$), ajouter des vecteurs ($\overrightarrow{\mathcal{O}Q} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + a$).

Représenter les primitives géométriques

- Directions et points ; vecteurs et vecteurs positions
- Primitives géométriques ;
 - Droites ; vecteur position et vecteur
 - Plans ; vecteur (normal) et distance à l'origine
 - Sphère ; vecteur position et un nombre (rayon)
- Algorithmes spécialisés pour chaque cas, gestion des cas particulier
 - Calculs qui n'ont pas de « sens » géométrique ; $P + Q$, cP
 - Difficulté d'obtenir des primitives de calcul.

Géométrie euclidienne

Algèbre linéaire

Espace euclidien \mathbb{R}^n

- On ajoute un produit scalaire :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = ab \cos \theta \text{ où } \theta = \theta_A - \theta_B$$

Géométrie euclidienne

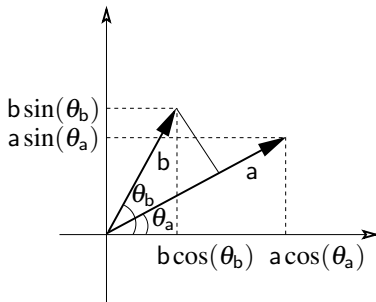
Algèbre linéaire

Espace euclidien \mathbb{R}^n

- On ajoute un produit scalaire :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = ab \cos \theta \text{ où } \theta = \theta_A - \theta_B$$

$$\begin{aligned}\vec{OA} \cdot \vec{OB} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= (a \cos \theta_A)(b \cos \theta_B) \\ &\quad + (a \sin \theta_A)(b \sin \theta_B) \\ &= ab(\cos \theta_A \cos \theta_B \\ &\quad + \sin \theta_A \sin \theta_B) \\ &= ab \cos(\theta_A - \theta_B)\end{aligned}$$



Géométrie euclidienne

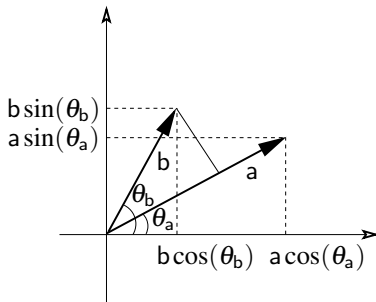
Algèbre linéaire

Espace euclidien \mathbb{R}^n

- On ajoute un produit scalaire :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = ab \cos \theta \text{ où } \theta = \theta_A - \theta_B$$

$$\begin{aligned}\vec{OA} \cdot \vec{OB} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= (a \cos \theta_A)(b \cos \theta_B) \\ &\quad + (a \sin \theta_A)(b \sin \theta_B) \\ &= ab(\cos \theta_A \cos \theta_B \\ &\quad + \sin \theta_A \sin \theta_B) \\ &= ab \cos(\theta_A - \theta_B)\end{aligned}$$



- Mesurer des angles, des distances.

- $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow \vec{OA}$ et \vec{OB} sont orthogonaux.

Géométrie euclidienne

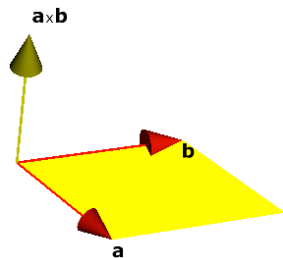
Algèbre vectorielle

Espace euclidien \mathbb{R}^3

- En dimension 3, on introduit un produit de vecteurs : le produit vectoriel “ \times ”, (cross product).

Pour $a, b \in \mathbb{R}^3$:

- $a \times b$ est perpendiculaire au plan défini par a et b .
- $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$ où θ est l'angle entre a et b .
- Les vecteurs a , b et $a \times b$ forment un repère direct (main droite).



Géométrie euclidienne

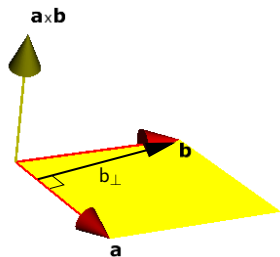
Algèbre vectorielle

Espace euclidien \mathbb{R}^3

- En dimension 3, on introduit un produit de vecteurs : le produit vectoriel “ \times ”, (cross product).

- $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$ est l'aire du parallélogramme défini par a et b .

$$\begin{aligned} \text{aire}(\text{parallelogramme}(a,b)) &= \text{base} * \text{hauteur} \\ &= (\text{longueur de } a) * (\text{longueur de } b_{\perp}) \\ &= \|a\| * (\|b\| \sin \theta) \end{aligned}$$



Espace euclidien \mathbb{R}^3 : produit vectoriel

- De nombreuses utilisations en physique (mécanique ; calcul du moment d'une force)
- En informatique graphique : calcul d'une normale à un polygone, intersection de 2 plans.
- C'est aussi une mesure de la "perpendicularité" ;
 - Quand a et b sont colinéaires : $a \times b = 0$.
- Mais il ne s'étend pas aux autres dimensions :
 - En dimension 4 : $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base, si l'on cherche un vecteur perpendiculaire à e_1 et e_2 : toute combinaison de e_3 et e_4 marche.

Géométrie euclidienne

Langage de la géométrie

- Un agrégat de méthodes et de formalismes ?
 - Matrices
 - Produit vectoriel
 - Coordonnées de Plücker
 - Quaternions
 - Quaternions duaux
 - Espace des sphères

Géométrie euclidienne

Langage de la géométrie

- Un agrégat de méthodes et de formalismes ?
 - Matrices
 - Produit vectoriel
 - Coordonnées de Plücker
 - Quaternions
 - Quaternions duaux
 - Espace des sphères

Algèbre géométrique

- Langage de haut niveau pour la géométrie
- Primitives géométriques ; éléments de l'algèbre
- Contient et étend ; Les nombres complexes, les quaternions, les coordonnées de Plücker, l'espace des sphères
- Un calcul est valable ; en toute dimensions, pour toutes les primitives géométriques

Le produit extérieur

Algèbre de Grassmann

Un “produit vectoriel” en toute dimension

$$\begin{array}{ll} a \wedge a = 0 & a \wedge b = -b \wedge a \\ \lambda a \wedge b = \lambda(a \wedge b) & (a + b) \wedge c = (a \wedge c) + (b \wedge c) \end{array}$$

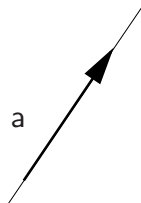
Le produit extérieur

Algèbre de Grassmann

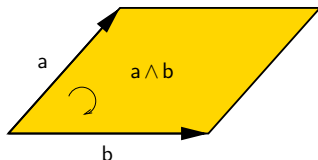
Un “produit vectoriel” en toute dimension

$$\begin{aligned} a \wedge a &= 0 & a \wedge b &= -b \wedge a \\ \lambda a \wedge b &= \lambda(a \wedge b) & (a + b) \wedge c &= (a \wedge c) + (b \wedge c) \end{aligned}$$

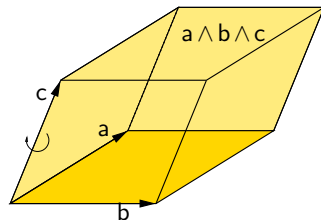
Étendre la notion de vecteur



vecteur



2-vecteur

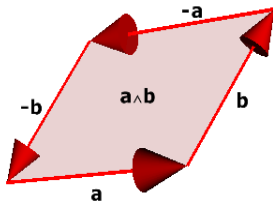
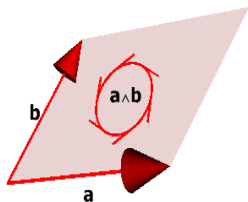


3-vecteur

Le produit extérieur

Algèbre de Grassmann

Étendre la notion de vecteur



$$a \wedge a = 0$$

$$\lambda a \wedge b = \lambda(a \wedge b)$$

$$a \wedge b = -b \wedge a$$

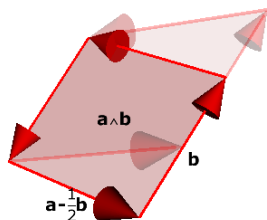
$$(a + b) \wedge c = (a \wedge c) + (b \wedge c)$$

- Ces éléments ont une position, une orientation, une étendue (longueur, aire)

Le produit extérieur

Algèbre de Grassmann

Étendre la notion de vecteur



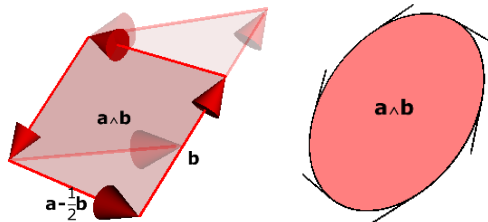
$$(a - \frac{1}{2}b) \wedge b = a \wedge b$$

Le produit extérieur

Algèbre de Grassmann

Étendre la notion de vecteur^a

a. La plupart des figures sont faites avec GAViewer et sont extraites du livre *Geometric Algebra for Computer Science*, Dorst et al.



$$(a - \frac{1}{2}b) \wedge b = a \wedge b = (a - \frac{1}{2}b) \wedge (\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b)$$

Le produit extérieur

Algèbre de Grassmann

Représenter des sous-espaces vectoriel

- Exprimer la dépendance linéaire, $a \wedge b = 0$, a et b sont collinéaires
- Droites : x appartient à la droite déterminée par a :
 $x = \lambda a \Leftrightarrow x \wedge a = 0$
- Plans : x appartient au plan déterminé par a et b :
 $x = \lambda a + \mu b \Leftrightarrow x \wedge a \wedge b = 0$
si B est un 2-blade, x appartient au plan déterminé par B :
 $x \wedge B = 0$
- Si \mathcal{A} est un sous-espace engendré par a_1, \dots, a_k
Le blade $A = a_1 \wedge \dots \wedge a_k$ représente \mathcal{A}
 $x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \wedge A = 0$

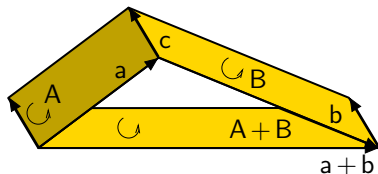
Le produit extérieur

Algèbre de Grassmann

Une algèbre de sous-espaces

- Le produit : le produit extérieur “ \wedge ”
- Multiplication par un scalaire ($\lambda a, \mu(a \wedge b)$) : représentation du même sous-espace
- Addition de blades : Addition de sous-espaces

$$\begin{aligned}A + B &= a \wedge c + b \wedge c \\ &= (a + b) \wedge c\end{aligned}$$



- Espace des multivecteurs :

$$\Lambda(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\Lambda^0(\mathbb{R}^n)}_{\text{scalaires}} \oplus \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \oplus \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \oplus \dots \oplus \underbrace{\Lambda^n(\mathbb{R}^n)}_{\text{pseudo-scalaires} \sim \text{scalaires}}$$

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Produit géométrique de deux vecteurs

- Pour a et b des vecteurs de \mathbb{R}^n , on pose que :

$$ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

- On a :
 - $a(bc) = (ab)c$ (associativité)
 - $a(b+c) = ab+ac$ et $(b+c)a = ba+ca$ (distributivité)
 - $aa = a^2 = a \cdot a = \|a\|^2$
 - Pas de propriété de commutativité

Le produit géométrique

Un lien avec les nombres complexes

Interprétation géométriques des parties réelles et imaginaires

- Multiplication par un nombre complexe conjugué

$$z\bar{w} = (z_1 + iz_2)(w_1 - iw_2) = \underbrace{(z_1 w_1 + z_2 w_2)}_{\text{produit scalaire}} + i(z_2 w_1 - z_1 w_2)$$

Le produit géométrique

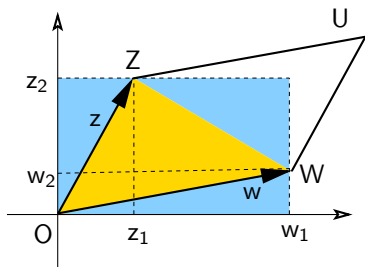
Un lien avec les nombres complexes

Interprétation géométriques des parties réelles et imaginaires

- Multiplication par un nombre complexe conjugué

$$z\bar{w} = (z_1 + iz_2)(w_1 - iw_2) = \underbrace{(z_1 w_1 + z_2 w_2)}_{\text{produit scalaire}} + i \underbrace{(z_2 w_1 - z_1 w_2)}_{\text{aire parallélogramme}}$$

$$\begin{aligned} \text{aire}(\mathcal{O}WUZ) &= 2 * \text{aire}(\mathcal{O}WZ) \\ &= 2 * (w_1 z_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} z_1 z_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} w_1 w_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (w_1 - z_1)(z_2 - w_2)) \\ &= z_2 w_1 - z_1 w_2 \end{aligned}$$



Le produit géométrique

Un lien avec les nombres complexes

Interprétation géométriques des parties réelles et imaginaires

- Multiplication par un nombre complexe conjugué

$$z\bar{w} = (z_1 + iz_2)(w_1 - iw_2) = \underbrace{(z_1 w_1 + z_2 w_2)}_{\text{produit scalaire}} + i \underbrace{(z_2 w_1 - z_1 w_2)}_{\text{aire parallélogramme}}$$

- On peut voir un nombre complexe comme la somme d'une quantité scalaire et d'une quantité qui représente un élément du plan.

Le produit géométrique

Un lien avec les nombres complexes

Interprétation géométriques des parties réelles et imaginaires

- Multiplication par un nombre complexe conjugué

$$z\bar{w} = (z_1 + iz_2)(w_1 - iw_2) = \underbrace{(z_1 w_1 + z_2 w_2)}_{\text{produit scalaire}} + i \underbrace{(z_2 w_1 - z_1 w_2)}_{\text{aire parallélogramme}}$$

- On peut voir un nombre complexe comme la somme d'une quantité scalaire et d'une quantité qui représente un élément du plan.
- On aurait "moralement"

$$z\bar{w} = z \cdot w + i(z \times w)$$

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Inverse d'un vecteur

- L'inverse d'un vecteur $a^{-1} = \frac{a}{a \cdot a} = \frac{a}{\|a\|^2}$. En effet :

$$aa^{-1} = \frac{aa}{a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a}(a \cdot a + a \wedge a) = 1$$

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

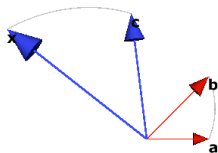
Inverse d'un vecteur

- L'inverse d'un vecteur $a^{-1} = \frac{a}{a \cdot a} = \frac{a}{\|a\|^2}$. En effet :

$$aa^{-1} = \frac{aa}{a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a}(a \cdot a + a \wedge a) = 1$$

Similitude

- On a deux vecteurs a et b , et un troisième vecteur c . Déterminer un vecteur x tel que x et c soient dans le même rapport que a et b .



Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Inverse d'un vecteur

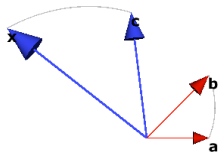
- L'inverse d'un vecteur $a^{-1} = \frac{a}{a \cdot a} = \frac{a}{\|a\|^2}$. En effet :

$$aa^{-1} = \frac{aa}{a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a}(a \cdot a + a \wedge a) = 1$$

Similitude

- On a deux vecteurs a et b , et un troisième vecteur c . Déterminer un vecteur x tel que x et c soient dans le même rapport que a et b .

On écrit $xc^{-1} = ba^{-1}$
d'où $x = (ba^{-1})c$



Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Inverse d'un vecteur

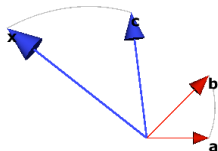
- L'inverse d'un vecteur $a^{-1} = \frac{a}{a \cdot a} = \frac{a}{\|a\|^2}$. En effet :

$$aa^{-1} = \frac{aa}{a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} (a \cdot a + a \wedge a) = 1$$

Similitude

- On a deux vecteurs a et b , et un troisième vecteur c . Déterminer un vecteur x tel que x et c soient dans le même rapport que a et b .

On écrit $xc^{-1} = ba^{-1}$
d'où $x = (ba^{-1})c$



- Quand on écrit cela avec des coordonnées, on retrouve une matrice de similitude.

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Inverse d'un vecteur

- L'inverse d'un vecteur $a^{-1} = \frac{a}{a \cdot a} = \frac{a}{\|a\|^2}$. En effet :

$$aa^{-1} = \frac{aa}{a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a}(a \cdot a + a \wedge a) = 1$$

Division "à droite"

- On a $x = x(aa^{-1})$, quelle interprétation géométrique ?

$$\begin{aligned}x &= (xa)a^{-1} \\ &= (x \cdot a + x \wedge a)a^{-1} \\ &= (x \cdot a)a^{-1} + (x \wedge a)a^{-1}\end{aligned}$$

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Inverse d'un vecteur

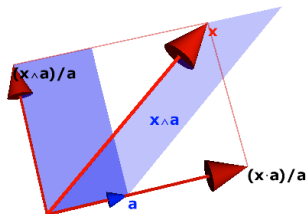
- L'inverse d'un vecteur $a^{-1} = \frac{a}{a \cdot a} = \frac{a}{\|a\|^2}$. En effet :

$$aa^{-1} = \frac{aa}{a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a}(a \cdot a + a \wedge a) = 1$$

Division "à droite"

- On a $x = x(aa^{-1})$, quelle interprétation géométrique ?

$$\begin{aligned}x &= (xa)a^{-1} \\ &= (x \cdot a + x \wedge a)a^{-1} \\ &= (x \cdot a)a^{-1} + (x \wedge a)a^{-1}\end{aligned}$$



- Le premier terme est la projection orthogonale sur a .
- Le second terme est la réjection de x par a .

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Réflexion par rapport à une droite

- Quelle est la signification de $a^{-1}(xa)$?

$$\begin{aligned}a^{-1}(xa) &= \frac{1}{aa}a(xa) \\ &= axa\frac{1}{aa} \\ &= (ax)a^{-1} \\ &= (a \cdot x)a^{-1} + (a \wedge x)a^{-1} \\ &= (x \cdot a)a^{-1} - (x \wedge a)a^{-1}\end{aligned}$$

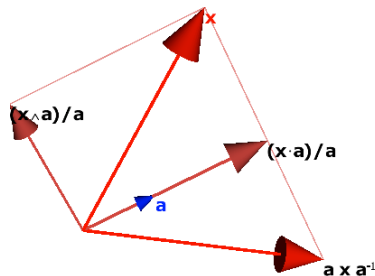
Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Réflexion par rapport à une droite

- Quelle est la signification de $a^{-1}(xa)$?

$$\begin{aligned}a^{-1}(xa) &= \frac{1}{aa}a(xa) \\ &= axa\frac{1}{aa} \\ &= (ax)a^{-1} \\ &= (a \cdot x)a^{-1} + (a \wedge x)a^{-1} \\ &= (x \cdot a)a^{-1} - (x \wedge a)a^{-1}\end{aligned}$$



- L'expression $a^{-1}xa$ calcule la réflexion de x par rapport à a .
Remarque : on a $a^{-1}xa = axa^{-1}$.

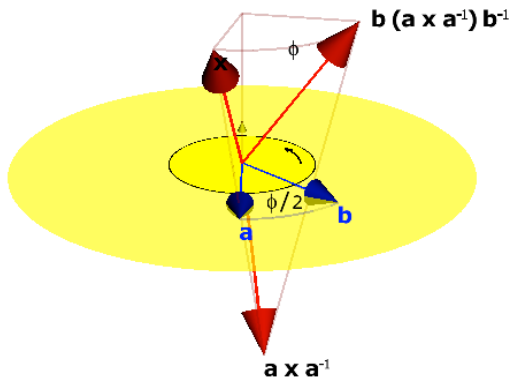
Le produit géométrique

Rotations

- Deux réflexions par rapport à une droite forment une rotation plane :

$$b(axa^{-1})b^{-1} = baxa^{-1}b^{-1} = (ba)x(ba)^{-1}.$$

En effet $baa^{-1}b^{-1} = 1$.



Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Définition pour tous les éléments de l'algèbre

- Le produit géométrique : $\Lambda(\mathbb{R}^n) \times \Lambda(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda(\mathbb{R}^n)$
 - Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ et $A, B, C \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$:

$$\alpha A = A\alpha$$

$$A(B + C) = AB + AC \text{ et } (A + B)C = AC + BC$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$aa = a \cdot a = \|a\|^2$$

- $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ muni du produit géométrique est noté \mathbf{G}^n

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Bases

- La donnée d'une base de \mathbb{R}^n induit une base sur \mathbf{G}^n .
- *Exemple* : en dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée

1	base pour les 0-vecteurs (scalaires)
e_1, e_2, e_3	base pour les 1-vecteurs (vecteurs)
$e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3$	base pour les 2-vecteurs (bivecteurs)
$e_1 e_2 e_3$	base pour les 3-vecteurs

- On note $e_i e_j = e_{ij}$ et pour \mathbf{G}^n on note le pseudoscalaire
 $I = e_1 \cdots e_n = e_{1\dots n}$

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

Inverse d'un blade

- Inverse du pseudoscalaire $I = e_1 \cdots e_n$:

$$I^{-1} = e_n \cdots e_1$$

On a $I^{-1} = (-1)^{n(n-1)/2} I$.

Exemple : en dimension 2, $I^{-1} = (e_1 e_2)(e_2 e_1) = e_1 e_1 = 1$ et $I^{-1} = -I$.

- Inverse d'un blade $A = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$:
 - D'une façon générale

$$A^{-1} = (-1)^{k(k-1)/2} \frac{A}{\|A\|^2}$$

où $\| \cdot \|$ est définie à partir du produit scalaire $*$ étendu aux k -blades.

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

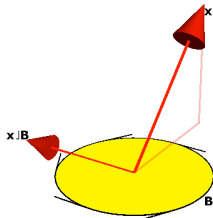
La contraction (gauche) “ \rfloor ”

- Obtenir un produit interne
 - Pour a un vecteur et B un k -blade, on peut écrire :

$$aB = a \rfloor B + a \wedge B$$

- Interprétation géométrique
 - La contraction d'un k -blade A sur j -blade B est un $(j - k)$ -blade contenu dans B orthogonal à A .

Exemple : Contraction d'un vecteur x sur un 2-blade B .



- On a :

$$\begin{aligned} x &= (xB)B^{-1} \\ &= \underbrace{(x \rfloor B)B^{-1}}_{\text{projection}} + \underbrace{(x \wedge B)B^{-1}}_{\text{rejection}} \end{aligned}$$

Le produit géométrique

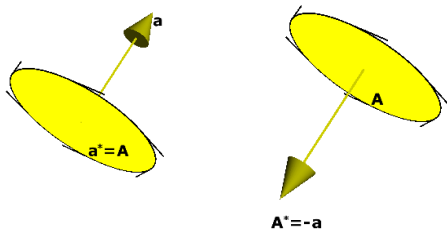
Algèbre géométrique

La dualité

- Le dual d'un multivecteur A est défini par :

$$A^* = AI^{-1} = A/I$$

- Si A est un k -blade de \mathbf{G}^n alors A^* est un $(n - k)$ -blade qui représente le complément orthogonal de A .



- On a aussi pour A un k -blade : $A^* = A|I^{-1}$

Le produit géométrique

Algèbre géométrique

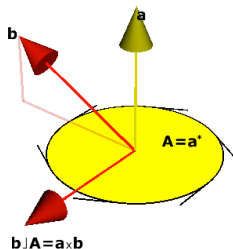
Le produit vectoriel

- Pour a et b des vecteurs de \mathbb{R}^3 , les vecteurs $(a \wedge b)^*$ et $a \times b$ sont colinéaires et de même norme. On pose

$$(a \times b) = (a \wedge b)^*$$

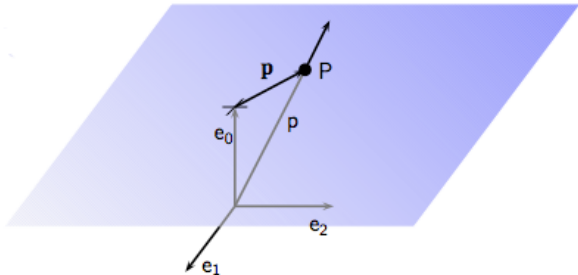
- En utilisant les propriétés de la contraction, on a :

$$a \times b = (a \wedge b)^* = (a \wedge b) \rfloor I^{-1} = -(a \wedge b) \rfloor I = b \rfloor (a \rfloor I) = b \rfloor a^*$$



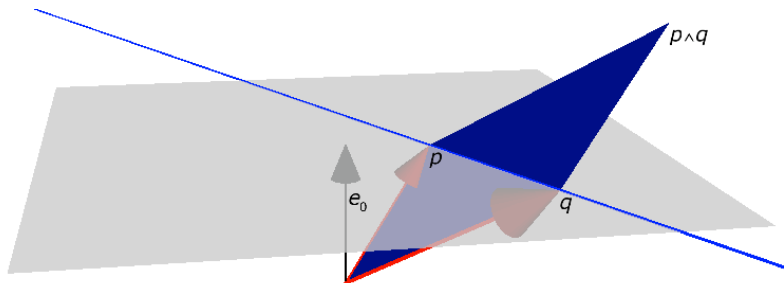
Le modèle homogène

- On ajoute une coordonnée selon e_0 ;
 - Point P représenté par un vecteur p : on a $p = e_0 + \mathbf{p}$



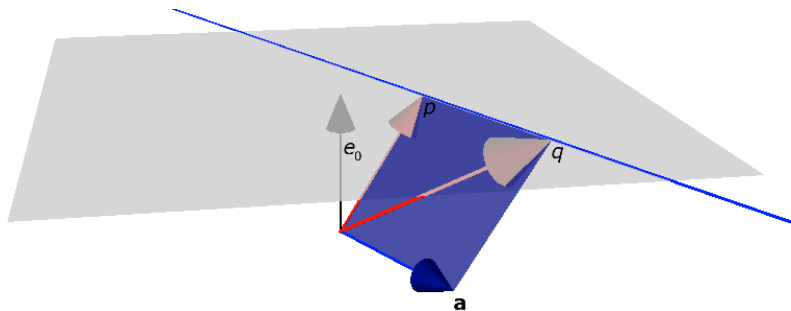
Le modèle homogène

- On ajoute une coordonnée selon e_0 ;
 - Point P représenté par un vecteur p : on a $p = e_0 + \mathbf{p}$
 - Droite de P à Q représentée par un 2-blade $p \wedge q$



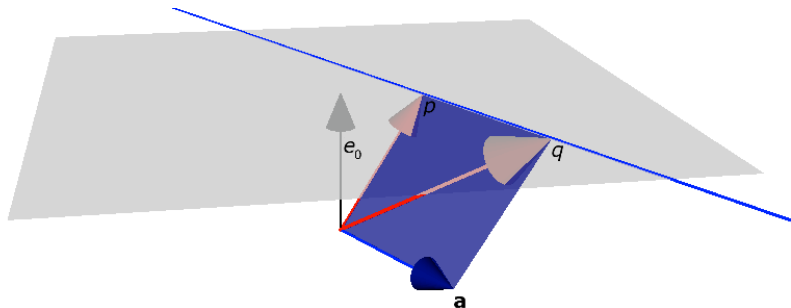
Le modèle homogène

- On ajoute une coordonnée selon e_0 ;
 - Point P représenté par un vecteur p : on a $p = e_0 + \mathbf{p}$
 - Droite de P à Q représentée par un 2-blade $p \wedge q$
 - Droite définie par un point p et une direction $\mathbf{a} = q - p = \mathbf{q} - \mathbf{p}$.
 - On a $p \wedge q = p \wedge (q - p) = p \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = p \wedge \mathbf{a}$.



Le modèle homogène

- On ajoute une coordonnée selon e_0 ;
 - Point P représenté par un vecteur p : on a $p = e_0 + \mathbf{p}$
 - Droite de P à Q représentée par un 2-blade $p \wedge q$
 - Droite définie par un point p et une direction $\mathbf{a} = q - p = \mathbf{q} - \mathbf{p}$.
 - On a $p \wedge q = p \wedge (q - p) = p \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = p \wedge \mathbf{a}$.
 - On retrouve \mathbf{a} par $\mathbf{a} = e_0 \rfloor (p \wedge q)$.



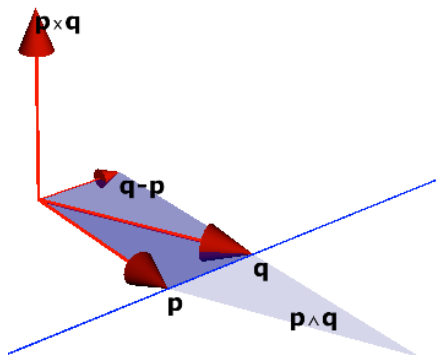
- Les translations sont vues par des applications linéaires.

Le modèle homogène

Les coordonnées de Plücker

- Pour une droite définie par deux P et Q de \mathbb{R}^3 : $p \wedge q$, on a :

$$\begin{aligned} p \wedge q &= (e_0 + \mathbf{p}) \wedge (e_0 + \mathbf{q}) \\ &= e_0 \wedge \mathbf{q} + \mathbf{p} \wedge e_0 + \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \\ &= e_0 \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \\ &= (\mathbf{p} - \mathbf{q})e_0 + (\mathbf{p} \times \mathbf{q})/ \end{aligned}$$

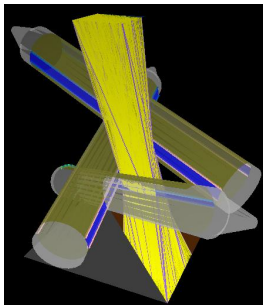


On reconnaît les coordonnées de Plücker : $[\mathbf{p} - \mathbf{q}; \mathbf{p} \times \mathbf{q}]$.

Le modèle homogène

Applications

- Calcul de la visibilité globale :



Sylvain Charneau.

Étude et applications des algèbres géométriques pour le calcul de la visibilité globale dans un espace projectif de dimension $n \geq 2$.

thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2007.



L. Aveneau, S. Charneau, L. Fuchs and F. Mora

A Framework for n-Dimensional Visibility Computations

Guide to Geometric Algebra in Practice, L. Dorst and J. Lasenby ed., 2011, Springer

Le modèle homogène

Applications

- Calcul de la visibilité globale :
 - Les droites sont des 2-blades d de $\Lambda(\mathbb{R}^{n+1})$, les bords f_i des faces sont des $(n-1)$ -vecteurs. On a :

$$\underbrace{d}_{2\text{-vecteur}} \wedge \underbrace{f_i}_{(n-1)\text{-vecteur}} = \underbrace{\gamma}_{(n+1)\text{-vecteur}} \sim \text{scalaire}$$

- Équivalent à un “produit scalaire” dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^{n+1})$. Permet la classification des droites.



Sylvain Charneau.

Étude et applications des algèbres géométriques pour le calcul de la visibilité globale dans un espace projectif de dimension $n \geq 2$.

thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2007.



L. Aveneau, S. Charneau, L. Fuchs and F. Mora

A Framework for n-Dimensional Visibility Computations

Guide to Geometric Algebra in Practice, L. Dorst and J. Lasenby ed., 2011, Springer

Applications

- Démonstration automatique de théorème de la géométrie projective :
 - On ajoute un nouveau produit, le *meet* “ \vee ” pour calculer des intersections.
 - Formalisation dans l’assistant de preuves Coq.
 - Structure de données et procédure décision.
 - Implantation de la méthode Li et Wu



[Hongbo Li and Yihong Wu](#)

Automated short proof generation for projective geometric theorems with Cayley and bracket algebras : I. Incidence geometry
Journal of Symbolic Computation, vol. 23 n. 5, 2003



[Laurent Fuchs and Laurent Théry.](#)

A formalisation of Grassmann-Cayley algebra in Coq and its application to theorem proving in projective geometry.
In Jürgen Richter-Gebert and Pascal Schreck, ed, (*ADG'2010*), Munich, 2010.

Le modèle homogène

Applications

- Démonstration automatique de théorème de la géométrie projective :

Construction	Expression algébrique
$[\overline{p_1}, \overline{p_2}]$ passant par $\overline{p_1}$ et $\overline{p_2}$	$p_1 \wedge p_2$
$\overline{p_1}$ libre sur $[\overline{p_2}, \overline{p_3}]$	$p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3) = 0$ ($p_2 \wedge p_3 \neq 0$)
p_1 intersection de $[\overline{p_2}, \overline{p_3}]$ et $[\overline{p_4}, \overline{p_4}]$	$p_1 = (p_2 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge p_5)$
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}$ colinéaires	$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 = 0$

Le modèle conforme

Améliorer le modèle homogène

- Dans le modèle homogène on n'a pas les aspects métriques.

Le modèle conforme

Améliorer le modèle homogène

- Dans le modèle homogène on n'a pas les aspects métriques.
- On ajoute deux coordonnées à l'espace \mathbb{R}^n : e_+ et e_- orthogonaux à \mathbb{R}^n .

Le modèle conforme

Améliorer le modèle homogène

- Dans le modèle homogène on n'a pas les aspects métriques.
- On ajoute deux coordonnées à l'espace \mathbb{R}^n : e_+ et e_- orthogonaux à \mathbb{R}^n .
- On introduit un produit scalaire tel que $e_+^2 = 1$ et $e_-^2 = -1$. On obtient un espace de Minkowski $\mathbb{R}^{n+1,1}$ et une algèbre $\mathbf{G}^{n+1,1}$.

Le modèle conforme

Améliorer le modèle homogène

- Dans le modèle homogène on n'a pas les aspects métriques.
- On ajoute deux coordonnées à l'espace \mathbb{R}^n : e_+ et e_- orthogonaux à \mathbb{R}^n .
- On introduit un produit scalaire tel que $e_+^2 = 1$ et $e_-^2 = -1$. On obtient un espace de Minkowski $\mathbb{R}^{n+1,1}$ et une algèbre $\mathbf{G}^{n+1,1}$.
- Le vecteur $e_o = e_- - e_+$ représente le point origine et le vecteur $e_\infty = \frac{1}{2}(e_+ + e_-)$ représente le point à l'infini.

Le modèle conforme

Représentation des points

- Un point P de vecteur position $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ est représenté par :

$$p = e_o + \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 e_\infty \in \mathbb{R}^{n+1,1}$$

- Comme dans le modèle homogène p et λp ($\lambda \neq 0$) représentent le même point. On a $\lambda = -e_\infty \cdot p$.
- On a

$$p \cdot q = -\frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2 = -\frac{1}{2}\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2$$

car $e_o^2 = e_\infty^2 = e_i \cdot e_\infty = 0$ avec $i \in \{1, 2, 3, o\}$ et $e_o \cdot e_\infty = -1$.

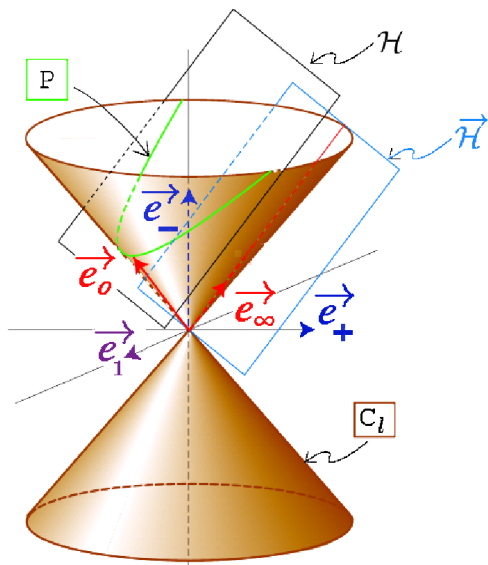
- Les points vérifient :

$$p \cdot p = 0.$$

Le modèle conforme

Représentation des points

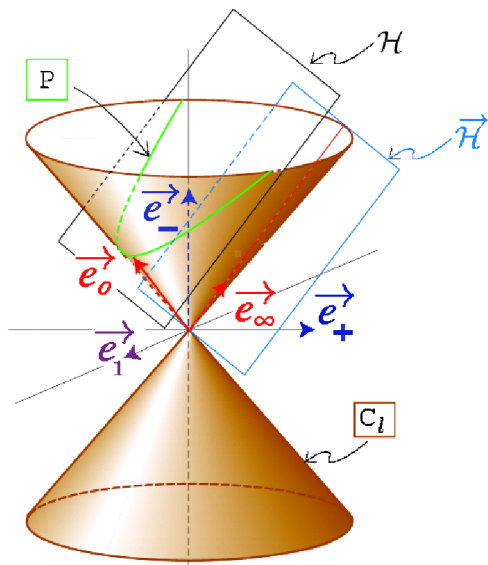
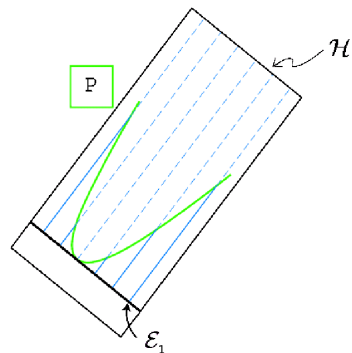
- On ajoute e_+ et e_-
- On construit
 $e_0 = e_- - e_+$ et
 $e_\infty = \frac{1}{2}(e_+ + e_-)$.



Le modèle conforme

Représentation des points

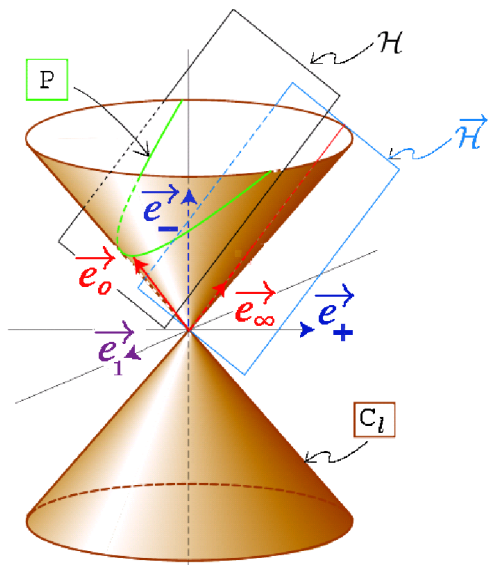
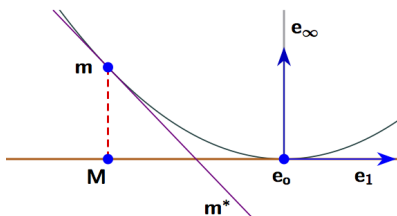
- On ajoute e_+ et e_-
- On construit
 $e_0 = e_- - e_+$ et
 $e_\infty = \frac{1}{2}(e_+ + e_-)$.



Le modèle conforme

Représentation des points

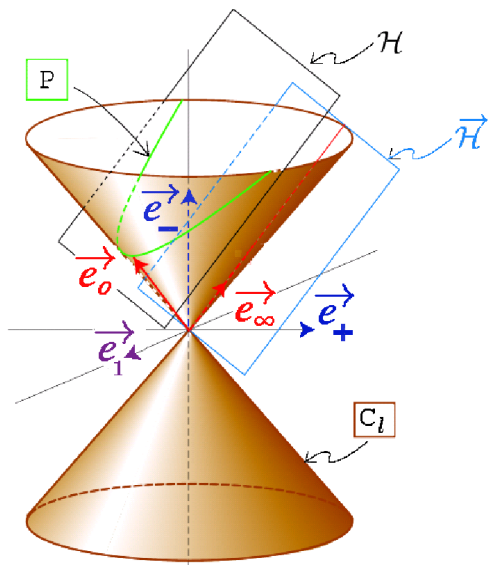
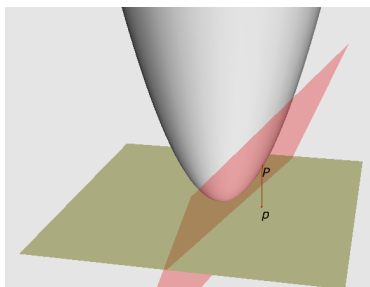
- On ajoute e_+ et e_-
- On construit
 $e_0 = e_- - e_+$ et
 $e_\infty = \frac{1}{2}(e_+ + e_-)$.



Le modèle conforme

Représentation des points

- On ajoute e_+ et e_-
- On construit
 $e_0 = e_- - e_+$ et
 $e_\infty = \frac{1}{2}(e_+ + e_-)$.



Le modèle conforme

Représentation (duale) des objets géométriques

- Sphères : de centre \mathbf{c} et \mathbf{x} un point de la sphère, on a :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = -\frac{1}{2}\|\mathbf{c} - \mathbf{x}\|^2 = -\frac{1}{2}\rho^2$$

avec ρ le rayon de la sphère. On a :

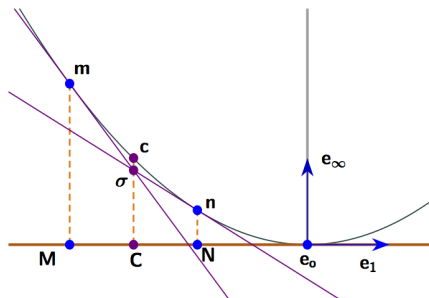
$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{c} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty) = 0.$$

Le vecteur $\sigma = (\mathbf{c} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty)$ représente la sphère de façon duale.

Le modèle conforme

Représentation (duale) des objets géométriques

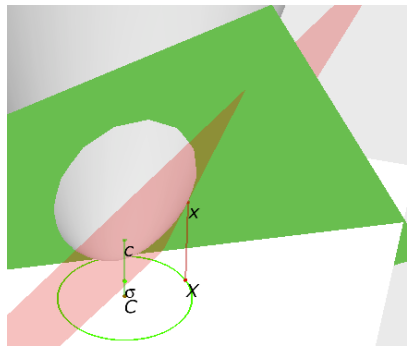
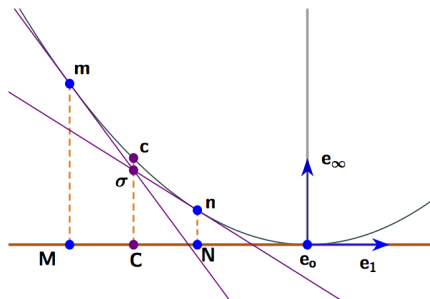
- Sphères :



Le modèle conforme

Représentation (duale) des objets géométriques

- Sphères :



Représentation (duale) des objets géométriques

- Plans : de normale \mathbf{n} et à une distance d de l'origine, $\pi = \mathbf{n} + de_{\infty}$. Pour \mathbf{x} un point du plan, on a :

$$\mathbf{x} \cdot \pi = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d = 0.$$

de normale \mathbf{n} et passant par \mathbf{p} , $\pi = \mathbf{n} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})e_{\infty}$. On a :

$$\mathbf{x} \cdot \pi = (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Remarque $e_{\infty} \cdot \pi = 0$. Le point à l'infini appartient au plan.

Le modèle conforme

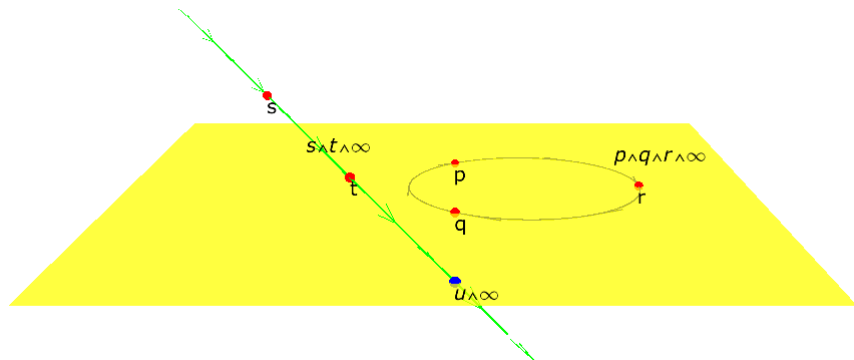
Représentation (directe) des objets géométriques

● Sphères : $S = p \wedge q \wedge r \wedge s$

● Plan : $P = m \wedge p \wedge q \wedge e_\infty$

● Cercle : $C = p \wedge q \wedge r$

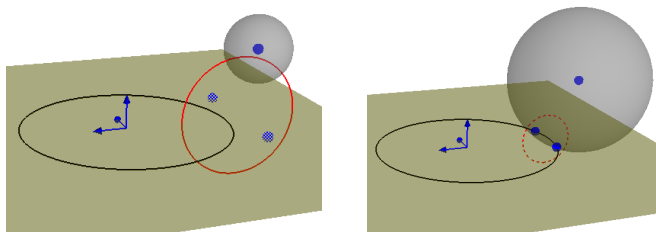
● Droite : $D = p \wedge q \wedge e_\infty$



Le modèle conforme

Discrétisation d'objets géométriques

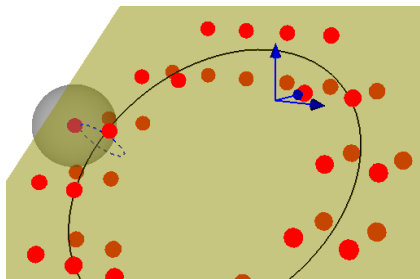
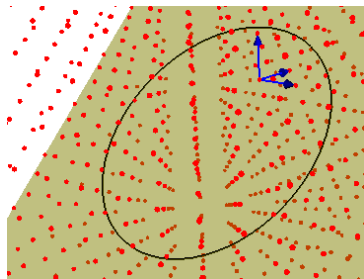
- Le plunge : dual de l'intersection



- Les objets géométriques ; réels ou imaginaires.
- Le dual d'un cercle est un bi-point.

Le modèle conforme

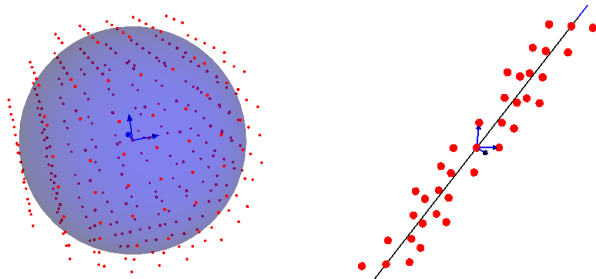
Discrétisation d'objets géométriques



Le modèle conforme

Discrétisation d'objets géométriques

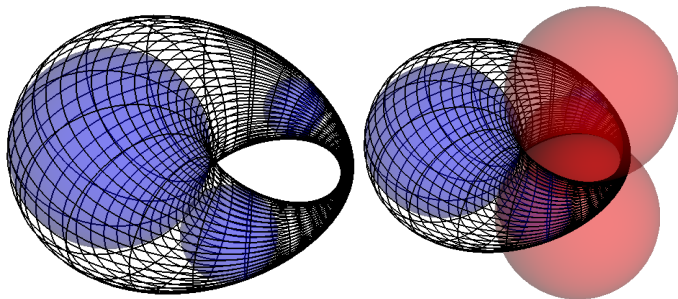
- Le même algorithme fonctionne pour toutes les k -sphères et les variétés linéaires.



Le modèle conforme

Un exemple de surface ; les cyclides de Dupin

- Cyclides : enveloppe d'une famille de sphères. Dans $\mathbb{R}^{4,1}$, les sphères σ avec $-e_\infty \cdot \sigma = 1/\rho$ forment la boule unité Λ^4 (on a $\sigma^2 = 1$). Un cercle dans Λ^4 définit une cyclide.



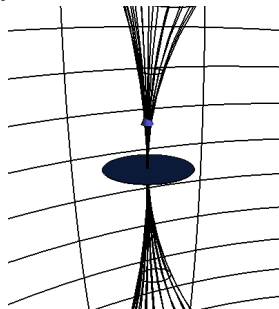
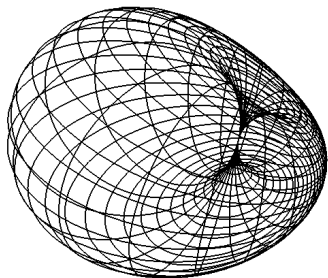
Lucie Druoton, Laurent Fuchs, Lionel Garnier and Rémi Langevin

The non-degenerate Dupin cyclides in the space of spheres using Geometric Algebra
AGACSE 2012, La Rochelle. (soumis à AACA)

Le modèle conforme

Un exemple de surface ; les cyclides de Dupin

- Cyclides : enveloppe d'une famille de sphères. Dans $\mathbb{R}^{4,1}$, les sphères σ avec $-e_\infty \cdot \sigma = 1/\rho$ forment la boule unité Λ^4 (on a $\sigma^2 = 1$). Un cercle dans Λ^4 définit une cyclide.



Lucie Druoton, Laurent Fuchs, Lionel Garnier and Rémi Langevin

The non-degenerate Dupin cyclides in the space of spheres using Geometric Algebra
AGACSE 2012, La Rochelle. (soumis à AACA)

Implantations

Il existe différents types d'implantations

- **Implantation dans un langage de prog. :**
 - **Gaigen 2.5 (Fontine, Dorst) :**
<http://sourceforge.net/projects/g25/>
 - **Gaalop (Hildendrand) :** <http://www.gaalop.de/>
 - **Bibliothèque O'Caml (Charneau, Fuchs)**
- **Dans des logiciels de calculs formels :**
 - **Maple : CLIFFORD (Ablamowicz, Fauser) :**
<http://math.tntech.edu/rafal/cliff12/index.htm>
 - **Matlab : GABLE (Dorst, Mann) :**
<http://staff.science.uva.nl/leo/GABLE/index.html>
 - **Matematica : (Aragon-Camarasa *et al.*)**
<http://arxiv.org/abs/0810.2412>
- **Des visualisateurs interactifs :**
 - **GAViewer (Fontijne, Dorst) :**
<http://www.science.uva.nl/ga/viewer/>
 - **CluCalc (Perwass) :** <http://www.clucalc.info/>

Implantations

Nécessité d'une implantation efficace

- Construction de l'algèbre sur \mathbb{R}^n , \mathbf{G}^n de dimension 2^n .
- Pour le modèle conforme sur \mathbb{R}^3 , besoin de 2^5 coordonnées :
 - Toutes les coordonnées ne sont pas utilisées ; beaucoup de zéros

Nécessité d'une implantation efficace

- Construction de l'algèbre sur \mathbb{R}^n , \mathbf{G}^n de dimension 2^n .
- Pour le modèle conforme sur \mathbb{R}^3 , besoin de 2^5 coordonnées :
 - Toutes les coordonnées ne sont pas utilisées ; beaucoup de zéros
- Utilisation d'arbres binaires :
 - Tous les produits sont définis récursivement sur une structure d'arbre binaire.
 - Représentation compact des éléments de l'algèbre.
 - Des opérations « complexes » comme la factorisation de k -blade est aussi décrite en termes d'arbres binaires.



Laurent Fuchs and Laurent Théry.

Implementing Geometric Algebra Products with Binary Trees.
AGACSE 2012, La Rochelle. (soumis à AACA)

Un peu de lecture...



Dietmar Hildenbrand

Foundations of geometric algebra computing

Geometry and Computing, vol. 8, Springer, 2013.



Christian Perwass

Geometric algebra with applications in engineering

Springer, 2009



Leo Dorst, Daniel Fontijne and Stephen Mann

Geometric Algebra for Computer Science : An Object Oriented Approach to Geometry,

Morgan Kaufmann Publishers, 2007



Chris Doran and Anthony Lasenby

Geometric Algebra for Physicists

Cambridge U. Press, 2003

Un peu de lecture...



Pertti Lounesto

Clifford Algebra and Spinors

Lon. Math. Soc. Lect. Notes 286, Cambridge U. Press, 2001



David Hestenes and Garret Sobczyk

Clifford Algebra to Geometric Calculus : A Unified Language for Mathematics and Physics

Fundamental Theories of Physics, vol 5, Kluwer Academic Publishers
1984



Alan Macdonald

A Survey of Geometric Algebra and Geometric Calculus

Luther College, Decorah, IA USA,

<http://favulty.luther.edu/~macdonal>