

Restes arithmétiques et caractéristiques d'un sous-segment discret

Jean Ouattara^{1,2}, Eric Andres¹, Gaëlle Largeteau-Skapin¹,
Rita Zrour¹, Théodore Tapsoba²
Université de Poitiers, Laboratoire XLIM-SIC, CNRS 7252¹
Université de Bobo-Dioulasso²

—
JIG, Nancy, 14-15 novembre 2013

Problématique

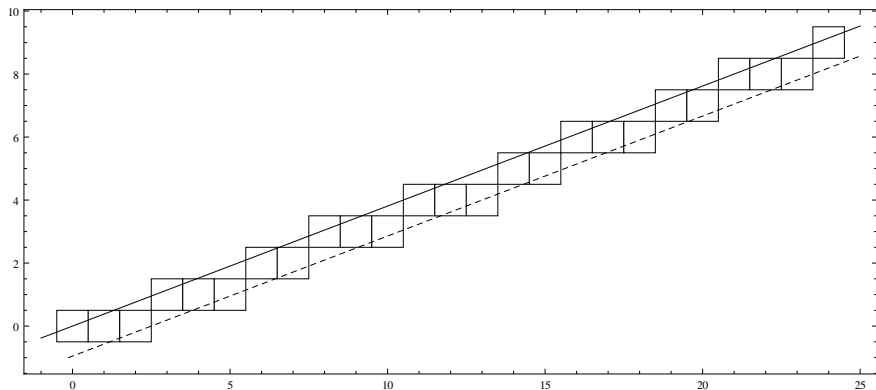


Figure: Droite discrète de caractéristiques $(8, 21, 0)$ pour $x \in [0, 25]$

Problématique

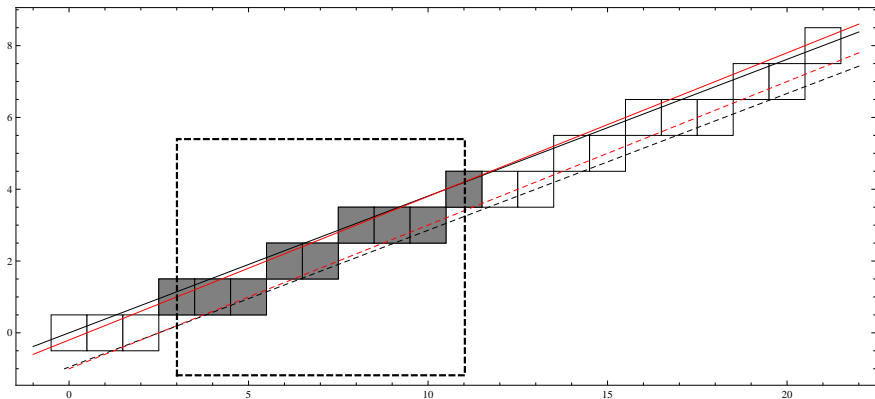


Figure: Comment caractériser la sélection? Par $(8, 21, 0)$ ou $(2, 5, 1)$?

Plan

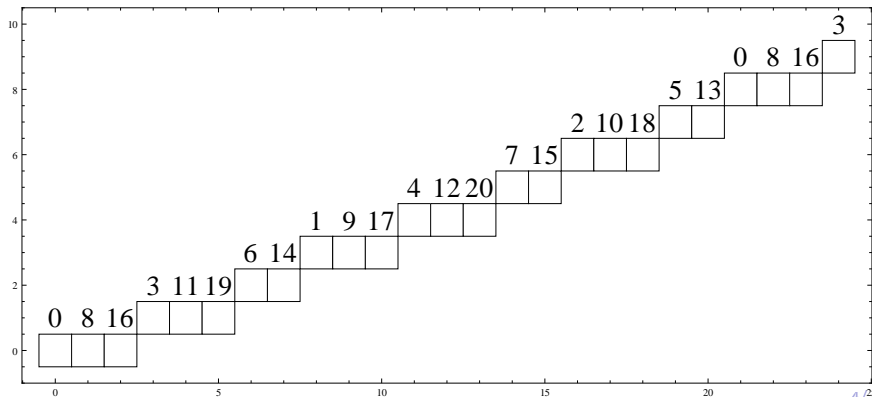
- 1 Notions et propriétés des droites et sous-segments discrets
- 2 Restes arithmétiques et points d'appuis
- 3 Bilan et Perspectives

Droite discrète naïve

Reveillès, Thèse '91

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3, 0 \leq a < b, \text{pgcd}(a, b) = 1$$

$$\mathcal{D}(a, b, c) : \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq ax - by - c < b\}$$



Restes arithmétiques et propriétés de droites discrètes

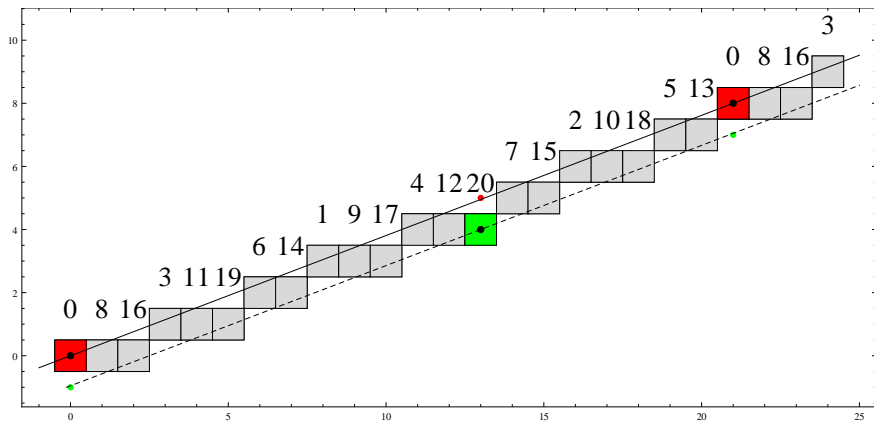
Reveillès, Thèse '91 et Debled-Rennesson, Thèse '95

- Reste arithmétique au point (x, y) : $\mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) = ax - by - c$;
- Droite d'appui inférieure : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax - by - c = b - 1\}$;
- Droite d'appui supérieure : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax - by - c = 0\}$.

Table: Classes de points en fonction des droites d'appui

Classe	Supérieur	Inférieur
Point extérieur	$\mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) < -1$	$\mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) > b$
Point faiblement extérieur	$\mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) = -1$	$\mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) = b$
Point d'appui	$\mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) = 0$	$\mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) = b - 1$
Point intérieur	$0 < \mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) < b - 1$	

Restes arithmétiques et propriétés de droites discrètes

Figure: Points et droites d'appuis de $\mathcal{D}(8, 21, 0)$

Définition (Debled-Renesson, Thèse '95)

Un sous-segment discret de caractéristiques (a, b, c) et d'extrémités d'abscisses u et v , noté $\mathcal{S}(\mathcal{D}, u, v)$ est une partie connexe de la droite discrète $\mathcal{D}(a, b, c)$ contenant au moins trois points d'appuis de \mathcal{D} . En plus il n'existe pas une autre droite discrète $\mathcal{D}_1(a_1, b_1, c_1)$ avec $b_1 < b$ qui vérifie le même prédicat.

Caractérisation d'un sous-segment discret

Configurations

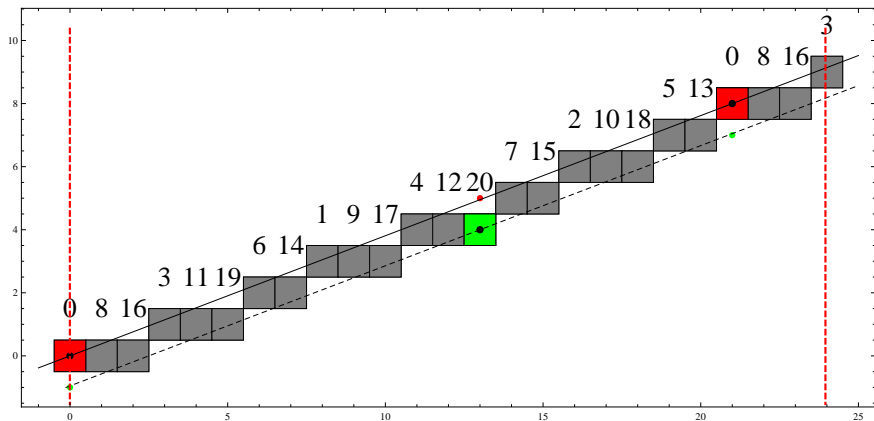


Figure: Sous-segment de même caractéristiques que $\mathcal{D}(8, 21, 0)$

Caractérisation d'un sous-segment discret

Configurations

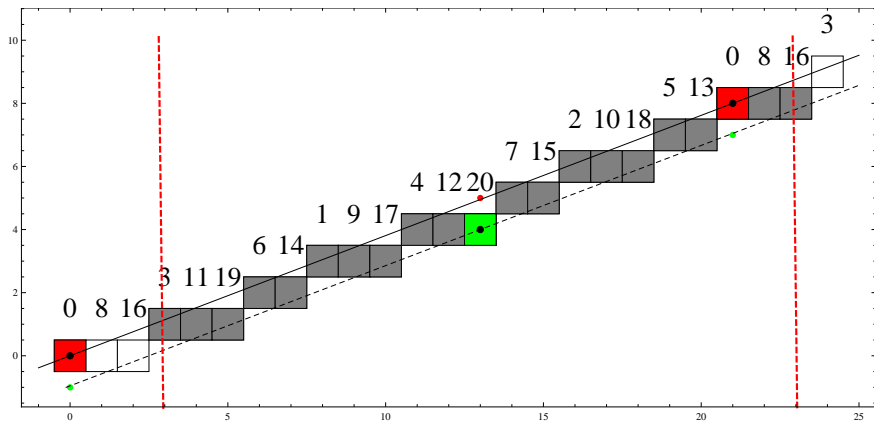


Figure: Sous-segment ayant 2 points d'appuis de $\mathcal{D}(8, 21, 0)$

Caractérisation d'un sous-segment discret

Configurations

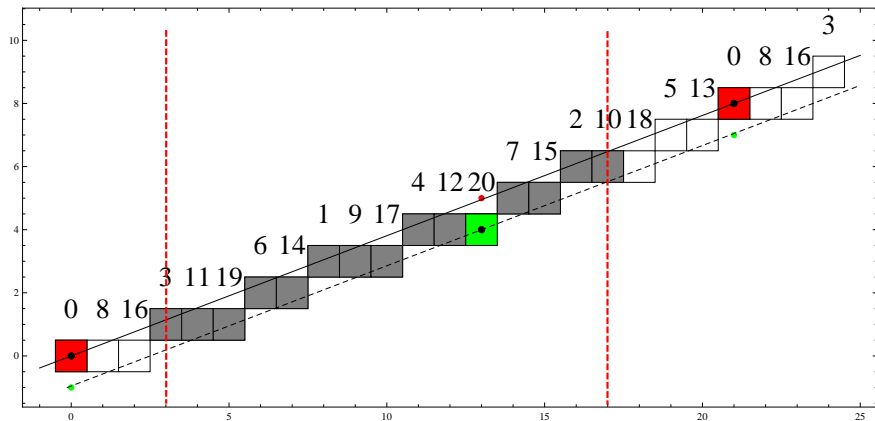


Figure: Sous-segment ayant 1 point d'appui de $\mathcal{D}(8, 21, 0)$

Caractérisation d'un sous-segment discret

Configurations

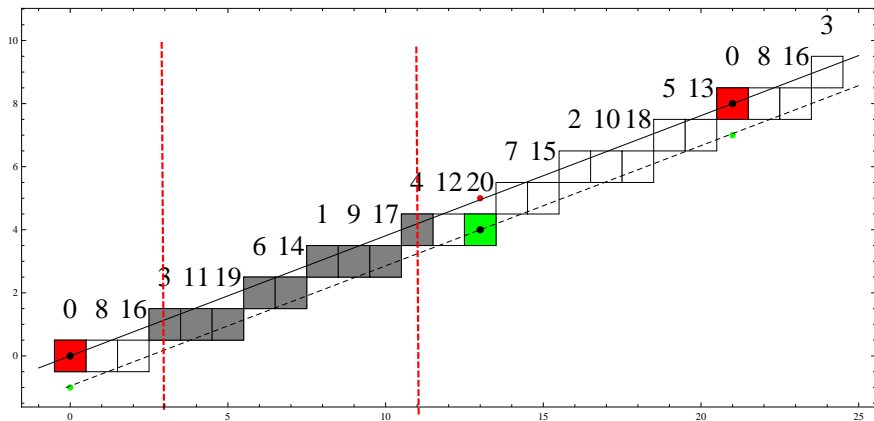


Figure: Sous-segment n'ayant aucun point d'appui de $\mathcal{D}(8, 21, 0)$

Caractérisation d'un sous-segment discret

Configurations

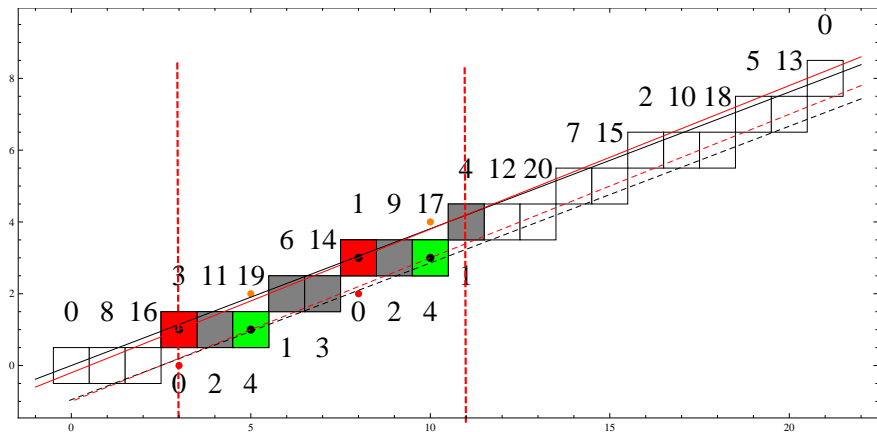


Figure: Sous-segment de caractéristiques (2, 5, 1)

Comment reconnaître un sous-segment

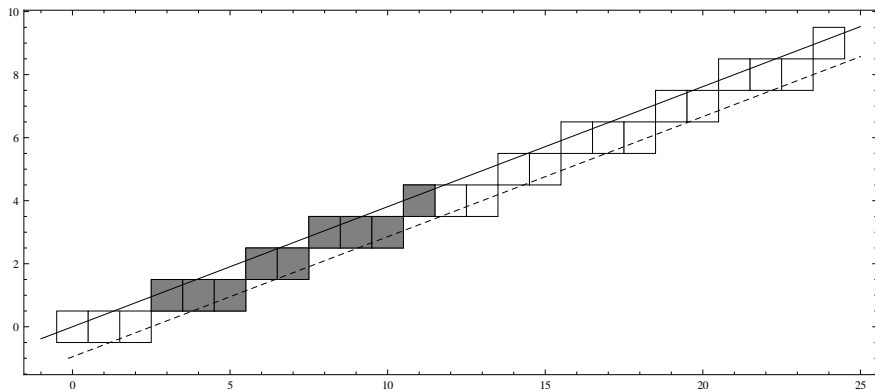


Figure: Quelles caractéristiques pour le sous-segment discret?

Mise à jour en cas d'érosion

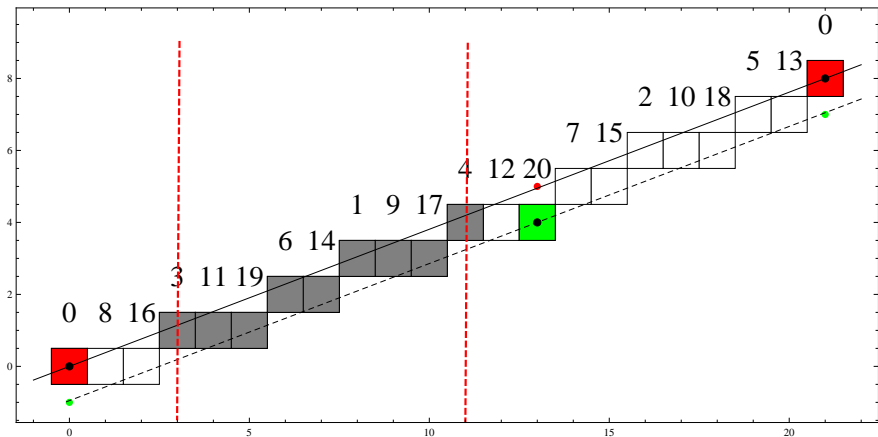


Figure: Caractéristiques de partie de $\mathcal{D}(8, 21, 0)$ d'extrémités 3 et 11

Érosion du point d'appui inférieur à droite

Mise à jour en cas d'érosion

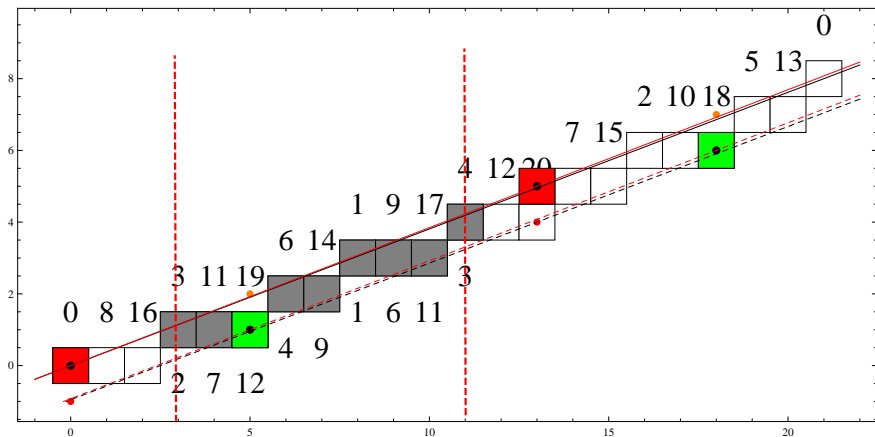


Figure: Caractéristiques de partie de $\mathcal{D}(5, 13, 0)$ d'extrémités 3 et 11

Érosion du point d'appui supérieur à droite

Mise à jour en cas d'érosion

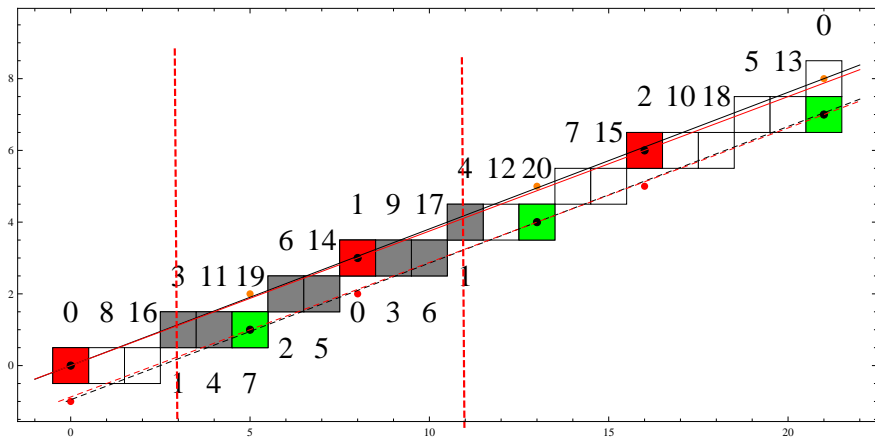
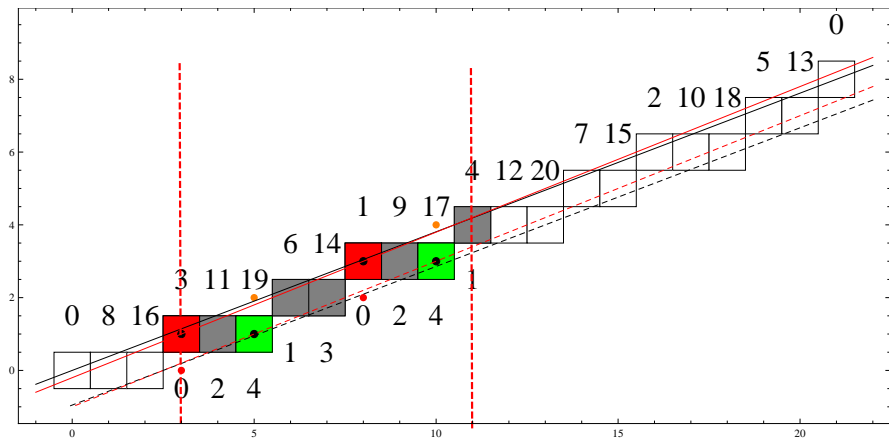


Figure: Caractéristiques de partie de $\mathcal{D}(3, 8, 0)$ d'extrémités 3 et 11

Érosion du point d'appui inférieur à droite

Mise à jour en cas d'érosion

Figure: Sous-segment $S(2, 5, 1)$

Mise à jour en cas de dilatation

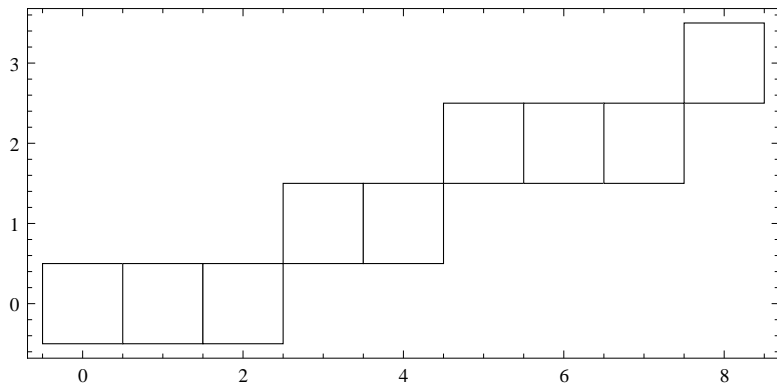


Figure: Sous-segment à reconnaître

Mise à jour en cas de dilatation

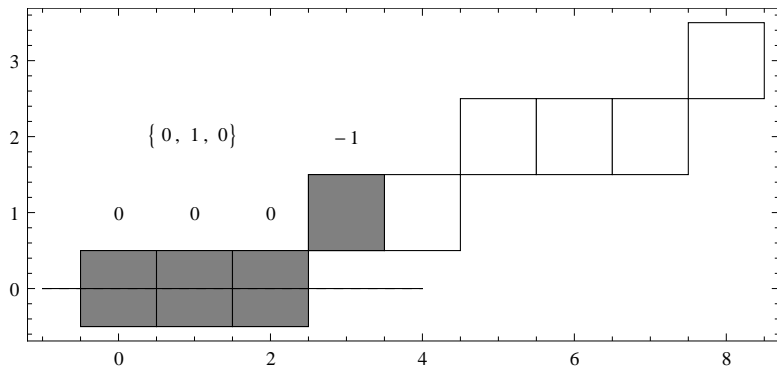


Figure: Mise à jour des caractéristiques à l'ajout du pixel (3,1)

Mise à jour en cas de dilatation

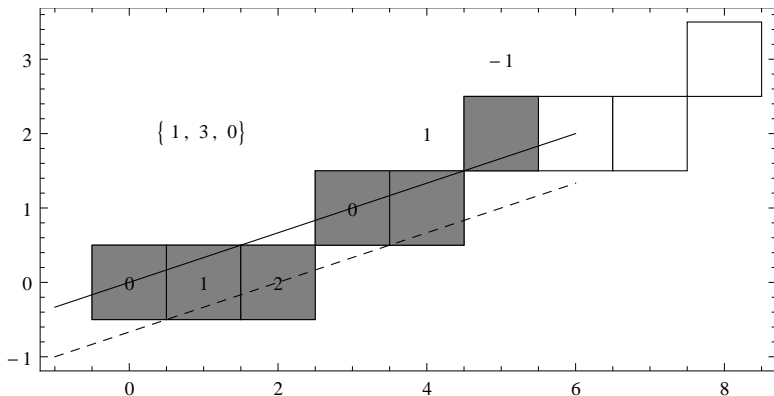
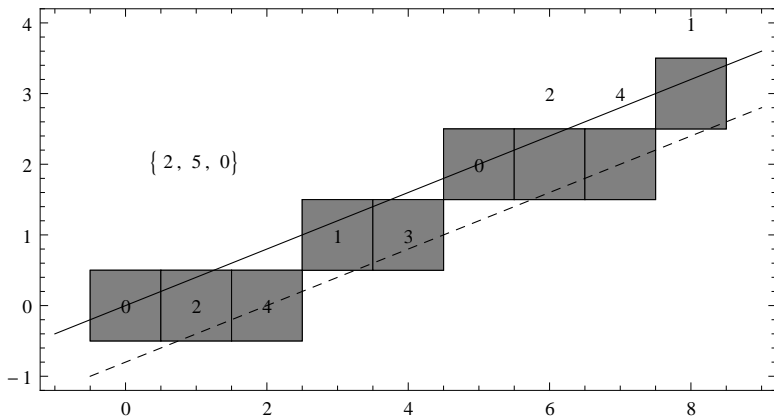


Figure: Mise à jour des caractéristiques à l'ajout du pixel (5, 2)

Mise à jour en cas de dilatation

Figure: Fin de la reconnaissance de $\mathcal{S}(2, 5, 0)$

Approches de reconnaissances existantes

- Isabelle Debled-Renneson and Jean-Pierre Reveilles. A linear algorithm for segmentation of digital curves. IJPRAI, 09(04):635-662, 1995;
- Mouhammad Said and Jacques-Olivier Lachaud. Computing the characteristics of a subsegment of a digital straight line in logarithmic time. In DGCI'11, volume 6607 of LNCS, pages 320-332. Springer, 2011;
- Isabelle Sivignon. Walking in the farey fan to compute the characteristics of a discrete straight line subsegment. In DGCI'13, volume 7749 of Lecture Notes in Computer Science, pages 23-34. Springer, 2013.

Principe

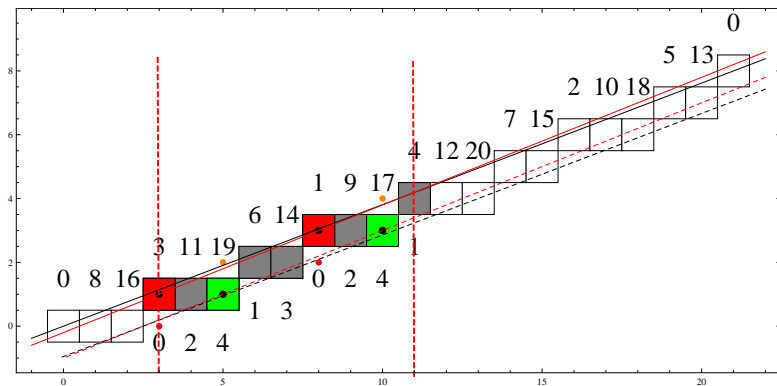


Figure: Les points de reste extremum sont les nouveaux points d'appuis

Lien entre points d'appuis et restes arithmétiques

Theorem (Théorème fondamental)

Le point $m(x_m, y_m)$ (resp. $M(x_M, y_M)$) où le reste arithmétique est le minimum (resp. maximum) des restes de D dans $[u, v]$ est un point d'appui supérieur (resp. inférieur) de S .

De la preuve

- 1 Nous montrons que l'évolution des restes arithmétiques sur un sous-segment suit leur évolution sur une droite contenant le sous-segment;
- 2 Comme les points d'appuis ont les restes minimaux (0) et maximaux (b-1) on déduit le théorème.

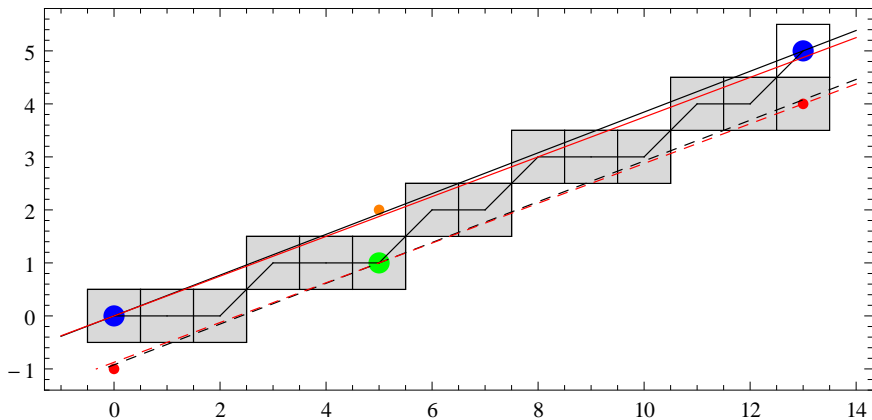


Figure: Sous-segment et son érodé en gris

Convenons que

- $\mathcal{D}(a, b, c)$ est une droite discrète;
- $\mathcal{S} = (\mathcal{D}, u, w)$ est un sous-segment de \mathcal{D} ;
- $\mathcal{S}' = (\mathcal{D}, u, v)$ de caractéristiques (α, β, γ) est l'érodé de \mathcal{S} ;
- $\mathcal{R}_{a,b,c}(x, y) \Leftrightarrow \mathcal{R}_{a,b,c}(x)$

Lemma (Relation entre un sous-segment et son érodé)

$$a\beta - \alpha b = \pm 1.$$

Proof.

$$\exists P(x, y) \mid \begin{cases} ax - by - c = 0 \\ \alpha x - \beta y - \gamma = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x + b) - \beta(y + a) - \gamma = -1 \\ \text{ou} \\ \alpha(x - b) - \beta(y - a) - \gamma = -1 \end{array} \right. \end{cases}$$



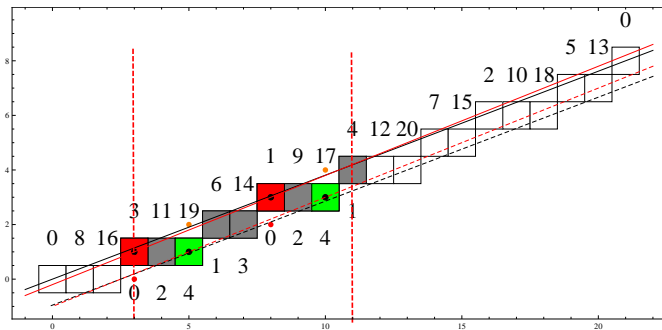


Figure: Les points de reste extremum sont les nouveaux points d'appuis

Theorem (Relation entre restes d'un sous-segment et de son érodé)

$\forall x, x' \in [u, v], |x - x'| \leq b :$

$$\mathcal{R}_{a,b,c}(x) < \mathcal{R}_{a,b,c}(x') \Rightarrow \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) \leq \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x').$$

Éléments de preuve

- 1 $y = \frac{ax-c-\mathcal{R}_{a,b,c}(x)}{b}$ et $y' = \frac{ax-c-\mathcal{R}_{a,b,c}(x')}{b}$;
- 2 remplacer dans $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x')$ y et y' par leurs valeurs du 1;
- 3 $\mathcal{R}_{a,b,c}(x') - \mathcal{R}_{a,b,c}(x) = k$ et $(\alpha b - \beta a) = \pm 1$;
- 4 $\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x') \leq 1 - \frac{1}{b}$.

Corollary (Les points d'appuis sont fixes)

Notons m (resp. M) le point d'appui supérieur (resp. inférieur) de S appartenant à S' . m (resp. M) est aussi un point d'appui supérieur (resp. inférieur) de S' .

Corollary (Les restes évoluent pareillement)

Soit un intervalle $[u, v]$ tel que $u \leq v \leq t < w$. Alors :

$$\min(\mathcal{R}_{a,b,c}(u, v)) = \mathcal{R}_{a,b,c}(x_m) \Rightarrow \min(\mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(u, v)) = \mathcal{R}_{\alpha,\beta,\gamma}(x_m)$$

Le théorème est alors prouvé

Theorem (Théorème fondamental)

Le point $m(x_m, y_m)$ (resp. $M(x_M, y_M)$) où le reste arithmétique est le minimum (resp. maximum) des restes de D dans $[u, v]$ est un point d'appui supérieur (resp. inférieur) de S

Comment reconnaître un sous-segment

Récapitulatif

- Le point de reste minimal de la droite est un point d'appui supérieur du sous-segment;
- Le point de reste maximal de la droite est un point d'appui inférieur du sous-segment;
- Le troisième point d'appui du sous-segment est fonction des deux précédents.

Comment reconnaître un sous-segment

Pour reconnaître un sous-segment il suffit de calculer les points de restes minimal et maximal de la droite en entrée sur le sous-segment.

Exemple de calcul du point de reste minimal

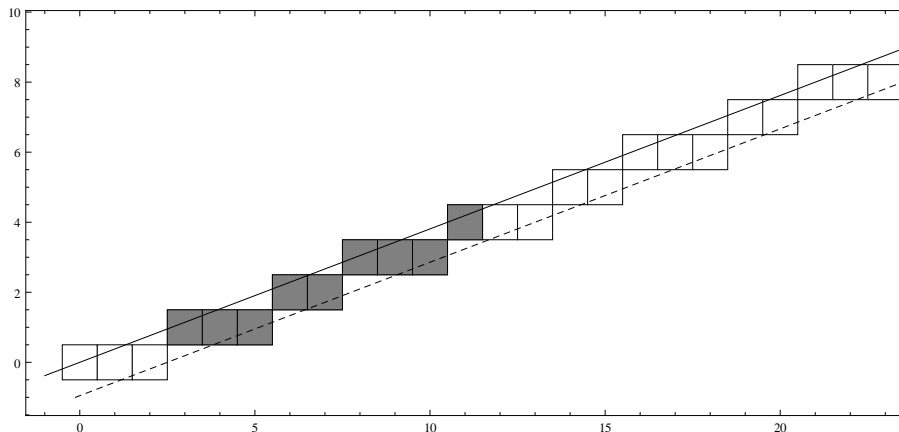


Figure: Quel est le reste minimal?

Exemple de calcul du point de reste minimal

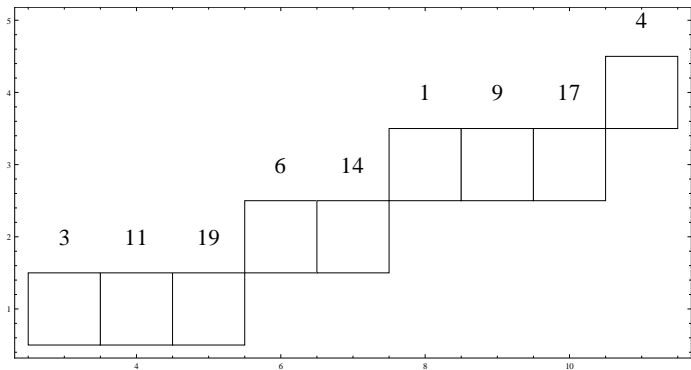


Figure: $\mathcal{R}(x) = 8x \pmod{21} \forall x \in [3, 11]$

$$(a, b, 0) \rightarrow (-b \pmod{a}, a, 0) \text{ et } u \rightarrow 1 + \lfloor \frac{a*(u-1)}{b} \rfloor, v \rightarrow \lfloor \frac{a*v}{b} \rfloor$$

Exemple de calcul du point de reste minimal

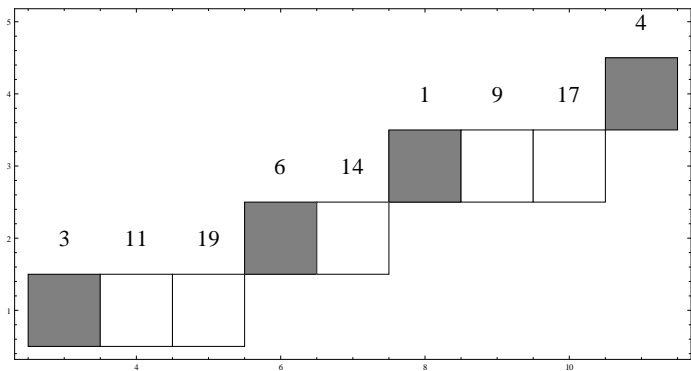


Figure: $\mathcal{R}(x) = 8x \pmod{21} \forall x \in [3, 11]$

Exemple de calcul du point de reste minimal

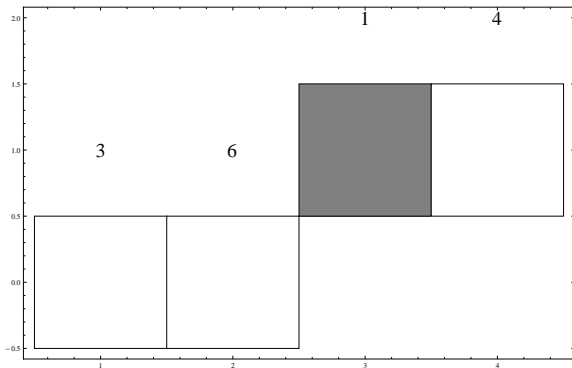


Figure: $\mathcal{R}(x) = 3x \pmod{8} \forall x \in [1, 4]$

Exemple de calcul du point de reste minimal

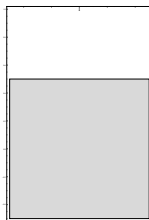


Figure: $\mathcal{R}(x) = x \bmod 3 \quad \forall x = 1$

Fin car on a un seul pallier

- Reste minimal $mini = 1$;
- Abscisse du point de reste minimal $x = mini \times x_0 \bmod b_0$

Algorithme de reconnaissance d'un sous-segment

Algorithme 1 : Reconnaissance de sous-segment

Input : $(a, b, \mu), u, v$

Output : (α, β, γ)

$m \leftarrow \text{PointDeResteminimal}(a, b, \mu, u, v);$

$M \leftarrow \text{PointDeRestemaximal}(a, b, \mu, u, v);$

$LP \leftarrow \text{TroisiemePoint}(a, b, \mu, u, v, m, M);$

$(\alpha, \beta, \gamma) \leftarrow \text{Caracteristiques}(m, M, LP);$

Comparaison avec d'autres approches

- Utilisation de benchmark de DGTAL;
- Segments de caractéristiques aléatoires mais avec un nombre maximum fixé pour b ;
- Les tailles de segments évoluent par puissance de 2 jusqu'à un maximum fixé;
- Calcul de la moyenne de temps d'exécution (sur 10000 tests) des algorithmes de reconnaissance de sous-segments pour chaque taille de segment.

Comparaison avec d'autres approches

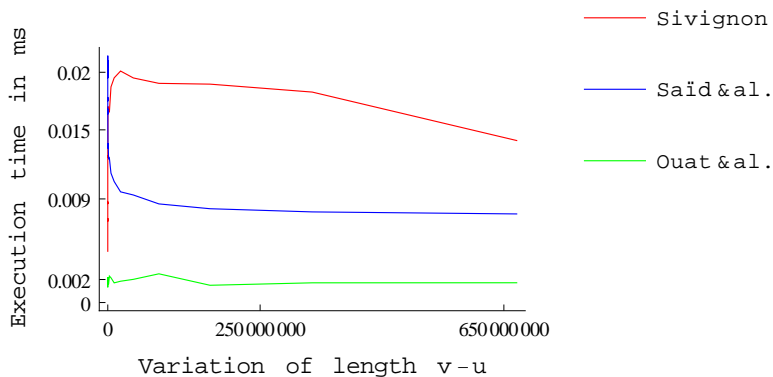


Figure: Comparaison pour des segments de taille allant jusqu'à 10^9

Comparaison avec d'autres approches

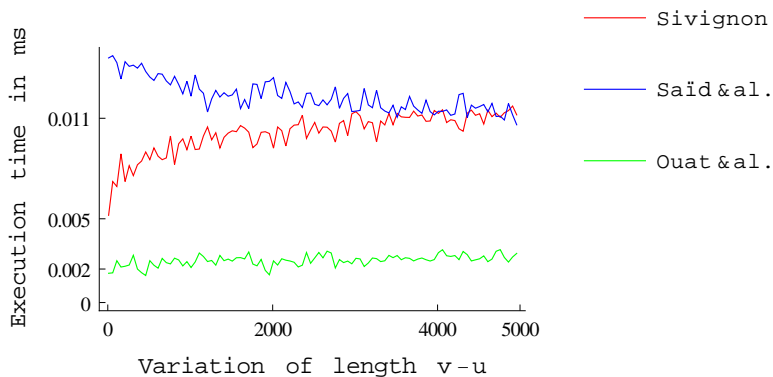


Figure: Comparaison pour des segments de taille allant jusqu'à 10^4

Bilan

- Lien établi entre les restes arithmétiques d'un sous-segment et ses caractéristiques;
- Algorithme de reconnaissance simple (Euclide) et efficace ($\log(a)$);
- Soumis à DAM.

Perspectives

- Comparaison avec les autres algorithmes à approfondir;
- Calculer en même temps les points de restes minimal et maximal;
- Calculer les caractéristiques à partir des points de restes minimal et maximal;
- Reconnaissance de sous-segments de droites 3D;
- Reconnaissance de morceaux de plans en 3D;
- Reconnaissance de sous-segments de droites de pente irrationnelle.

Merci de votre attention

Questions et suggestions